Ministère de l'Enseignement Supérieur . *Ministry of Higher Education*

République du Cameroun Paix-Travail-Patrie

Ecole Normale Supérieure de Yaounde
Higher Teacher's Training College of Yaounde

Republic Of Cameroon Peace-Work-Fatherland

Concours d'entrée en première année du premier cycle
Epreuve majeure : Mathématiques Coef 4 Durée : 3h. Session 2006

Exercice 1. Pour chacune des huit questions suivantes, retrouver la seule réponse juste parmi les trois réponses proposées.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (2^{3x}3^{-2x})dx$.

$$\begin{array}{ll} A: & I_n = -\dfrac{1}{9(2\ln 3 - 3\ln 2)}\left(\dfrac{8}{9}\right)^n; \\ B: & I_n = -\dfrac{9}{(2\ln 3 + 3\ln 2)}\left(\dfrac{8}{9}\right)^n; \\ C: & I_n = (2^{-3} \times 2^{3n}) \times (3^2 \times 3^{-3n}). \end{array}$$

2. La fonction f définie sur $0; 2\pi[$ par $f(x) = \ln(2\cos x - 1)$ a pour ensemble de définition :

   A : $[0; \frac{\pi}{3}] \cup]\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}$; B : $]\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}[$; C : $[0, \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$.

3. Le nombre de couples d'entiers (x, y) vérifiant : $\begin{cases} 23x - 17y = 5 \\ -50 \leq x \leq 50 \end{cases}$ est de :

   A : 50 ; B : 6 ; C : 17

4. (E) est l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z vérifiant $arg(z^3) = 0$.
   – A : (E) est l'axe des abscisses ;
   – B : (E) est un cercle ;
   – C : (E) est la réunion de deux segments de droite.

5. (C) est l'ensemble des points d'affixe Z vérifiant $4|z - 1 - i| = \sqrt{2}|z + \bar{z} + 4|$.
   – A : (C) est un cercle de centre $O'(1, 1)$;
   – B : (C) est une ellipse de foyer $O'(1, 1)$ et d'excentricite $\frac{\sqrt{2}}{4}$;
   – C : (C) est une ellipse de foyer $O'(1, 1)$ et de directrice $(D) : x = -2$.

6. $SABC$ est une pyramide de base carrée, de sommet S et dont toutes les arrêtes ont la même longuer a.

   A : $\|\overrightarrow{AS} \wedge \overrightarrow{AB}\| = a^2$; B : $\|\overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{SC}\| = a^2$; C : $\|\overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{SB}\| = a^2$.

7. $ABCDEFGH$ étant un cube, la composée de demi tour d'axes (AD) et (DC) est :
   – A : Le demi tour d'axe (AC) ;
   – B : La reflexion de plan (ADC) ;
   – C : Le demi tour d'axe (OH).

8. Dans une population, 15% des individus sont atteints d'une maladie A. Parmi les individus atteints de A, 20% ont une maladie B et parmi les individus non atteins de A, 4% ont la maladie B. On choisit au hasard un individu de cette population. À 0, 01 près,

   (a) a probabilité qu'il soit atteint des deux maladies est 0, 20 ;

(b) la probabilité qu'il souffre de A sachant qu'il souffre de A est $0,47$;

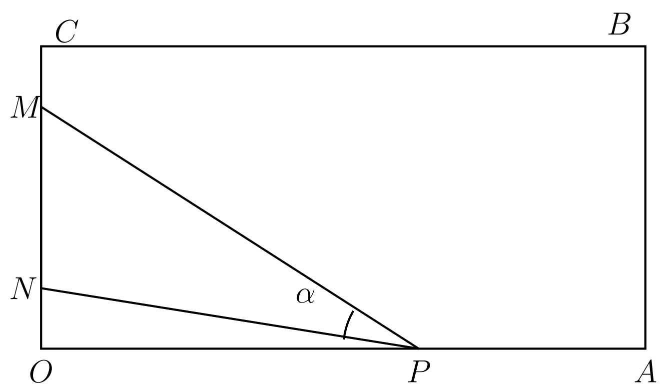
(c) la probabilité qu'il n'ait aucune des deux maladies est $0,61$.

Exercice 2. Pour tout couple d'entier naturel (n, m), on pose $I_{n,m} = \int_0^1 t^n(1-t)^m dt$.

1. Déponter que $I_{n+1,m} = \frac{n+1}{m+1} I_{n,m+1}$
2. En déduire que $I_{n,n} = \frac{n!}{(2n+1)!}$.
3. Comparer t et $1-t$ puis dresser le tableau de variation $t \mapsto t^n(1-t)^n$ sur $[0; 1]$.
4. En déduire que $\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq I_{n,n} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
5. Démontrer que la suite de terme générale $U_n = \frac{3^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ est convergente.

Exercice 3. Sur la figure ci-dessous $ABCD$ est un rectangle de longueur $OA = 120m$ et de largeur $OC = 30m$. Un cameraman cherche la position du point P pour lequel la mesure de l'angle α est maximale. On pose $OP = x$, $ON = 12m$ et $MN = 6m$.

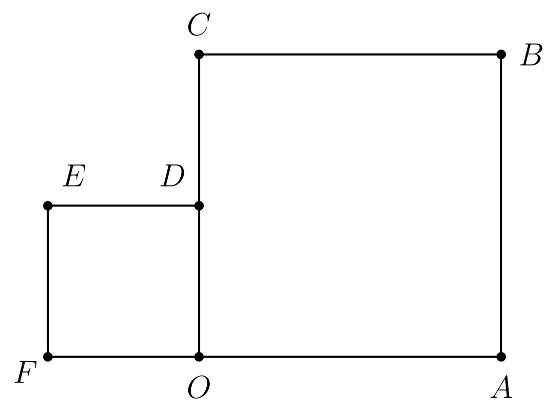
1. Exprimer les distances PN et PM en fonction de x.
2. Démontrer que $\cos\alpha = \frac{PN^2 + PM^2 - MN^2}{2 \times PN \times PM}$.
3. En déduire que $\cos^2\alpha = f(\alpha^2)$ où $f(x) = \frac{x^2 + 432x + 46656}{x^2 + 468x + 46656}$.
4. Etudier les variations de f sur $[0; 120]$.
5. Déterminer la valeur maximale de α à $0,01$ près par défaut ainsi que le position du point P correspondant.



Exercice 4. Ci-dessous : $OABC$ et $ODEF$ sont des carrés de sens direct. Le point D est milieu de $[OC]$. On désigne par S la similitude directe qui transforme O en E er B en O. On prendra $OA = 4$cm.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.
2. On désigne par I le centre de la similitude S.
   (a) Montrer que I appartient aux deux diamètres $[OB]$ et $[OE]$.
   (b) Reproduire la figure précédente et y placer le point I.
3. Donner la forme complexe de S dans $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ supposé orthonormé.

4. On considère l'ensemble (H) des points M vérifiant $OM - OA = 2$. Reconnaitre (H) et le construire sur la figure précédente.



Exercice 5. On définit la fonction f de la variable réelle x par $f(x) = x - (1 + e^x)\ln(1 + e^x)$.

1. Vérifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = e^x \ln(1 + e^x)$.
2. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un inervalle à préciser.
3. Montrer que la courbe de f admet deux asumptotes que l'on déterminera.
4. Construire la courbe (C) de f et la courbe (C') de sa réciproque dans le même repère (unité graphique : 2cm).