Ministère de l'Enseignement Supérieur **République du Cameroun**
. *Ministry of Higher Education* Paix-Travail-Patrie

Ecole Normale Supérieure de Yaounde **Republic Of Cameroon**
Higher Teacher's Training College of Yaounde Peace-Work-Fatherland

Concours d'entrée en première année du premier cycle
Epreuve majeure : Mathématiques Coef 4 Durée : 3h. Session 2007

Exercice 1
Dans un repère orthonormé (O, I, J), on désigne par l'ensemble (E) des points $M(x, y)$ vérifiant $(E) : x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$.

1. Montrer que (E) est une ellipse dont on donnera le centre I et l'excentricité.
2. Déterminer les points d'intersection de (E) avec les axes du repère (O, I, J)
3. Déterminer l'aire de l'ellipse (E).
4. Construire (E) par rapport au repère (O, I, J).

Exercice 2
On considère les suites (u_n) définies par : pour tout entier naturel n,

$$nu_{n+1} = 2 \times \sqrt[3]{u_n} \text{ avec } u_0 = 7,\ v_n = \ln(u_n), \quad \text{et } w_n = \ln\left(v_n - \frac{3\ln 2}{2}\right).$$

1. Démontrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\ln 3$ et en déduire l'expression de v_n en fonction de n.
2. Montrer que la suite (v_n) est convergente en déterminant sa limite.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente en précisant sa limte l.
5. Déterminer le plus petie entier naturel n tel que u_n est une valeur approchée de l à 0.01 près.

Exercice 3
Dans un plan P rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on considère l'application affine f_m qui transforme I en J et ayant pour matrice $A_m = \begin{bmatrix} m+1 & m \\ -m & -m^2+1 \end{bmatrix}$, m est un paramètre réel.

1. L'application f_m est-elle bijective pour toute valeur de m. Justifier.
2. Déterminer m sachant que f_m est une translation.
3. Pour quelles valeurs de m, f_m est-elle une similitude ? Caractériser f_m dans ces cas.
4. Déterminer l'expression analytique de l'application f.
5. Existe-t-il des droites globalement invariantes par f ? Si oui les déterminer.

Exercice 4
On considère un tétraède régulier $ABCD$ d'arête 2.

1. Déterminer l'aire totale $Aire(ABCD)$ des surfaces latérales de $ABCD$.
2. Exprimer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Déterminer les plans et les axes de symétries de $ABCD$.
4. Déterminer le volume de $ABCD$.
5. Déterminer, s'il existe, une sphère à la fois tangente aux quatres faces de $ABCD$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
2. Démontrer que pour tout $x \in D$, on a $1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$
3. En déduire que la fonction f est dérivable. On donnera le nombre en $x = 0$ et la tangente en $x = 0$.
4. Dresser le tableau de variations de f en justifiant le cheminement.
5. Construire la courbe C de f dans un repère orthonormé (O, I, J) (*unité 1cm*).
6. Déterminer une valeur approchée à 0.01 près de l'aire A du domaine borné délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$ (on pourra utiliser un calcul approché ou un encadrement semblable à celui de la question 2.)

Exercice 6

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations (E_1) : $3^{x+2} + 9^{x-1} = 1458$ et $2^{(2x-1)} + 3^x + 4^{(x+0.5)} - 9^{0.5x+1} = 0$.
2. Recopier et compléter les opérations $\overline{21}^{trois} \times \overline{221}^{trois} = \overline{\ldots}^{trois}$ et $\overline{101}^{deux} \times \overline{221}^{trois} = \overline{\ldots}^{six}$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales $I = \int_0^n e^x (\sin x)^2 dx$ et $J = \int_1^e (x^3)(\ln x)^2 dx$.