Ministère de l'Enseignement Supérieur — **République du Cameroun**
. *Ministry of Higher Education* — Paix-Travail-Patrie

Ecole Normale Supérieure de Yaounde — **Republic Of Cameroon**
Higher Teacher's Training College of Yaounde — Peace-Work-Fatherland

Concours d'entrée en première année du premier cycle
Epreuve majeure : Mathématiques Coef 4 Durée : 3h. Session 2008

Exercice 1

On considère le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, I, J)$ l'ensemble (E) des points $M(x, y)$ tels que $x^4 - 16(y^2 - 2y)^2 = 0$.

1. Montrer que (E) est la réunion d'une ellipse (E_1) et d'une hyperbole (E_2) dont on donnera les équations réduites respectives.
2. Déterminer l'intersection de (E_1) et (E_2).
3. Déterminer les foyers de (E_1) par rapport au repère R.
4. Déterminer l'excentricité et l'axe focal de (E_2).
5. La droite $(d) : \sqrt{3}x - 2y + 2 = 0$ est-elle tangente en au moins un point de (E) ? Si oui déterminer un tel point.
6. Construire (E) par rapport au repère R (unité 1cm).

Exercice 2

Dans cet exercice, les candidats répondront aux questions par Vrai(V) ou Faux(F) uniquement en recopiant et en complétant le tableau suivant :

Question	A.1	A.2	A.3	A.4	A.5	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5
Reponses										

Partie A

Dans le plan complexe, on considère :

- L'ensemble (S) des solutions de l'équation $z^3 + 4z^2 + (8 - 4i)z + 8 - 8i = 0$.
- L'ensemble E des points M d'affixe z tel que $(z - |z|)^3$ soit imaginaire pur.
- Le nombre complexe j de module 1 dont l'argument est $\frac{2\pi}{3}$.

1. (S) contient un nombre imaginaire pure.
2. (S) admet un élément dont un argument est $\frac{13\pi}{4}$.
3. Tous les pints de $(d) : \sqrt{3}x - y = 0$ appartiennent à E.
4. $(I + j)^{310} = -1$.
5. Le point image de j est un élément de E.

Partie B

On considère dans l'espace un carré $ABCD$ de sens direct dans le plan (ABC), de centre O, d'arrête $\sqrt{2}a$ (avec $a > 0$). On désigne aussi par S le point tel que $\overline{OS} = \frac{\sqrt{3}}{2a}\left(\overrightarrow{OA} \vee \overrightarrow{OB}\right)$.

1. Toute similitude qui transforme A en D et B en A est une isométrie.
2. On peut exprimer le milieu de $[SD]$ comme barycentre des points A, B, C et S.
3. ACS est équilatéral.
4. $\overline{AS}.\overline{BD} = \sqrt{2}a^2$.
5. La composée des reflexions S_{ABC} et S_{ACS} des plans (ABC) et (ACS) est le demi-tour d'axe (AS).

Problème

On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x), \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(1-x).$$

(C) et (C') désignent les courbes respectives de f et g par rapport à un repère orthonormé (O, I, J) du plan P (unité graphique 2cm).

Partie A

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. En déduire le signe de $f(x)$.
3. Montrer que (C') est le symétrique de (C) par rapport à l'origine O.
4. En déduire que pour tout réel dans $]0, 1[$, on a $\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$.

Partie B

1. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(a, b)$ tels que la tangente à (C) en a et la tangente à (C') en b soient parallèles.
2. Construire (E), C et (C').
3. On désigne par I l'aire du domaine plan délimité par (C) et (C') d'une part, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 0.8$.
   (a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte de I.
   (b) Donner une valeur approchée de I à $O.OO1$ près.

Partie C

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{5n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\ln\left(5 + \frac{1}{n}\right) < u_n < \ln\left(5 + \frac{5}{n-1}\right)$.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
3. Peut-on déterminer un rang n_0, entier naturel, à partir duquel u_n est une valeur approchée de $\ln 5$ à 0.001 près ? Si oui, déterminer un valeur possible de n_0 en justifiant.