Ministère de l'Enseignement Supérieur
. *Ministry of Higher Education*

République du Cameroun
Paix-Travail-Patrie

Ecole Normale Supérieure de Yaounde
Higher Teacher's Training College of Yaounde

Republic Of Cameroon
Peace-Work-Fatherland

Concours d'entrée en première année du premier cycle
Epreuve majeure : Mathématiques Coef 4 Durée : 3h. Session 2009

Exercice 1
On définit la fontion numérique f de la variable réelle x par

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+e^{2x}} - 1).$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer que pour tout réel x,
$$f(x) = 2x - \ln(\sqrt{1+e^{2x}} + 1) \quad \text{et} \quad f(x) = x + (\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x}).$$
2. Montrer que (C) admet deux asymptotes obliques (d) et (d') sécantes en $A(\ln 2, \ln 2)$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Construire la courbe (C) ainsi que ses deux asymptotes.
5. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

Exercice 2
Partie A
On désigne par $[A, B]$ un segment de milieu O du plan (P) et on se propose de déterminer l'ensemble E de toutes les isométries planes laissant le segment $[A, B]$ globalement invariant.

1. Citer tous les types d'isométries planes.
2. Etant donné un élément f de E, déterminer en justifiant $f(O)$.
3. A partir des valeurs possibles de l'image du point A par un élément f de E,
   (a) montrer que E contient exactement deux déplacements à préciser ;
   (b) montrer que E admet exactement deux antidéplacements à préciser.
4. Conclure.

Partie B
Dans l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on considère les points $A(-1, 1, 1)$, $B(3, 1, 1)$ et $C(1, 1, 1+2\sqrt{3})$. Déterminer :

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $mes\widehat{AOB}$;
2. le point D tel que $ABCD$ soit un tétraèdre régulier et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ direct ;
3. Chacun des ensembles des points E_1 et E_2 définis par $E_1 :\ AM = 2BM$ et $E_2 :\ \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{CM}$.

Exercice 3
On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le sens de variation de (u_n).
2. Montrer que (u_n) est majorée par 1. Qu'en conclure ?

3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{n}$.
4. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \dfrac{1}{2n}$.
5. Montrer rigoureusement que (u_n) converge vers une limite l à préciser.

Exercice 4

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation
$$z^4 - 12iz - 100 = 0.$$
2. Etant donné un réel $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on considère l'équation
$$(E): \ z^2 - 2z\tan\alpha + 2\tan^2\alpha + 1.$$
   (a) Résoudre l'équation (E).
   (b) Etant donné le point M_α dont l'affixe est la solution de (E) d'ordonnée positive, montrer que M_α est un point de la conique $(\Gamma): \ -x^2 + y^2 = 1$.
   (c) Déterminer la nature, un foyer et l'excentricité de (Γ).
   (d) Construire l'ensemble des points M_α lorsque α parcourt $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 5

1. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer chacune des intégrales suivantes :
$$I = \int_1^e (\ln x)^2 dx, \qquad J = \int_0^\pi e^{-x}\sin x dx, \qquad K = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$$
2. On pose $A_n = \dfrac{2n+76}{n+1}$ où n est un entier relatif distinct de -1.
   (a) Vérifier que $A_n = 2 + \dfrac{74}{n+1}$; puis citer tous les diviseurs de 74.
   (b) En déduire les valeurs de l'entier n pour lesquelles A_n est aussi un entier.