Université de Douala **Faculté des Sciences**

Examen de l'UE MA 435 : Polynômes orthogonaux classiques

Année 2008/2009. Durée : 3heures. 11 Juillet 2009.

Responsable : Prof Dr Mama Foupouagnigni

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.

Problème 1 (10pts). Soit $(V_n(x))$ la famille définie par

$$V_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},\ x=\cos\theta,\ 0\le\theta\le\pi.$$

1. Montrer que $V_n(x)$ est un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient dominant. Indication : on montrera d'abord que $V_{n+1}(x)+V_{n-1}(x)=2xV_n(x),\quad n\ge 1.$ [2pts]
2. Montrer que $(V_n(x))$ est une famille de polynômes orthogonaux classiques dont on déterminera les éléments caractéristiques tels que la relation de récurrence à trois termes et l'équation différentielle du second degré. [2pts]
   Indication : on se servira de la relation
   $$\int_0^{\pi} V_n(x)V_m(x)\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m},\ n,m\ge 0;$$
   que l'on prendra le soin d'établir.
3. Déterminer la famille monique $(v_n(x))$ associée à $(V_n(x))$. [0.5pts]
4. (a) Déterminer explicitement les zéros $(x_{n,k})$ de v_n, $n\ge 1$ tels que $x_{n,1}<x_{n,2}<\cdots<x_{n,n}$. [1pts]
   (b) Montrer que les λ_{nk} de la formule de quadrature de Gauss sont donnés par [2pts]
   $$\lambda_{nk} = \frac{4\pi}{2n+1}\sin^2\left(\frac{n-k+1}{2n+1}\pi\right).$$
   (c) Ecrire la formule de quadrature de Gauss. [1pts]
   (d) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}(1+x^2)dx.$ [1pts]
5. Déterminer [0.5pts]
   $$\lim_{n\to\infty} x_{n,1},\quad \lim_{n\to\infty} x_{n,n}.$$

Problème 2 (10pts). On considère la fonction de deux variables $\phi(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2xy+x^2}}$. On admet que sur l'ensemble $\mathcal{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,2|x||y|+|x|^2<1\}$ ϕ a un développement de la forme

$$\phi(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n(y)x^n \quad (E)$$

où les A_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que les dérivées partielles de ϕ à tous les ordres, par rapport à l'ensemble des deux variables x et y, peuvent se calculer en dérivant terme à terme le deuxième membre de l'égamité (E).

1. Calculer $A_n(0)$ et $A_n'(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. [2pts]
2. Calculer $x\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)+(x-y)\dfrac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)$.
   En déduire que $yA_0'(y)=0$ et pour tout $n\ge1$, $yA_n'(y)-A_{n-1}'(y)=nA_n(y)$. [2pts]
3. Calculer $(1-2xy+x^2)\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)+(x-y)\phi(x,y)$.
   En déduire que l'on a $A_1(y)-yA_0(y)=0$ et pour tout $n\ge2$ [2pts]
   $$nA_n(y)-(2n-1)yA_{n-1}(y)+(n-1)A_{n-2}(y)=0.$$
4. Montrer en utilisant les relations précédentes que $A_n'(y)-yA_{n-1}'(y)=nA_{n-1}(y)$, puis que [3pts]
   $$(1-y^2)A_n''(y)-2yA_n'(y)+n(n+1)A_n(y)=0.$$
5. A quelle famille de polynômes appartient (A_n) ? [1pts]