Université de Douala **Faculté des Sciences**

Examen de Rattrapage de l'UE MA 435 : Polynômes orthogonaux classiques

Année 2009/2010. Durée : 1h30.

Responsable : Prof Dr Mama Foupouagnigni

Exercice 1. On considère la fonction de deux variables $\phi(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2xy+x^2}}$. On admet que sur l'ensemble $\mathscr{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2|x||y| + |x|^2 < 1\}$ ϕ a un développement de la forme

$$\phi(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(y)x^n \quad (E)$$

où les A_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que les dérivées partielles de ϕ à tous les ordres, par rapport à l'ensemble des deux variables x et y, peuvent se calculer en dérivant terme à terme le deuxième membre de l'égamité (E).

1. Calculer $A_n(0)$ et $A_n'(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. [2pts]
2. Calculer $x\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) + (x-y)\dfrac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)$.
   En déduire que $yA_0'(y) = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $yA_n'(y) - A_{n-1}'(y) = nA_n(y)$. [2pts]
3. Calculer $(1-2xy+x^2)\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) + (x-y)\phi(x,y)$.
   En déduire que l'on a $A_1(y) - yA_0(y) = 0$ et pour tout $n \geq 2$ [2pts]
   $$nA_n(y) - (2n-1)yA_{n-1}(y) + (n-1)A_{n-2}(y) = 0.$$
4. Montrer en utilisant les relations précédentes que $A_n'(y) - yA_{n-1}'(y) = nA_{n-1}(y)$, puis que [3pts]
   $$(1-y^2)A_n''(y) - 2yA_n'(y) + n(n+1)A_n(y) = 0.$$
5. A quelle famille de polynômes appartient (A_n) ? [1pts]

Exercice 2 (12 points)**.** On définit la fonction L_n^α de la façon suivante :

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\ {}_1F_1(-n;\alpha;x).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n^α est une polynôme de degré n. [2pts]
2. Montrer que [2pts]
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} L_n^\alpha(x)r^n = \frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}} \exp\left(\frac{-xr}{1-r}\right).$$
3. On pose $F(x,r) = \frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}} \exp\left(\frac{-xr}{1-r}\right)$. Montrer que [2pts]
   $$(1-r^2)\frac{\partial F}{\partial r} + [x - (1+\alpha)(1-r)]F = 0.$$
4. Montrer que [2pts]
   $$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (x-\alpha-2n-1)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0.$$
5. Montrer que [2pts]
   $$x\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = nL_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x), \quad n \geq 1.$$
   On pourra utiliser la relation $(1-r)\frac{\partial F}{\partial x} + rF = 0$.
6. Déduire que L_n^α est solution de l'équation différentielle [2pts]
   $$xu'' + (\alpha+1-x)u' + nu = 0.$$