Épreuve de Mathématiques

Examineur : Njionou Patrick, S.

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1

7 points

u et v sont des entiers relatifs. Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0.$$

1. On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation [1pt]

$$14u + 39v = 1\ 129.$$

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$. Vérifier que le couple $(-25 ; 9)$ est solution de cette équation. [1pt]

c. En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1\ 129$.

Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u ; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient. [1pt]

d. Déterminer, parmi les couples $(u ; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible. [1pt]

2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.

En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14. [1pt]

b. Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \quad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont des entiers relatifs.}$$

Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78. [1pt]

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs. [1pt]

EXERCICE 2

4 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_A = \sqrt{3} + 2i$.

a. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2. [1pt]

Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ , puis construire le point A.

b. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_B = -1 + i(\sqrt{3} + 1)$.

Justifier que le point B appartient au cercle Γ . [1pt]

c. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I. [0.5pt]

d. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier. [0.5pt]

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.

Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ? [0.5pt]

Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration. [0.5pt]

EXERCICE 3

5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation : $3x + y - z - 1 = 0$ et $(\mathcal{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

1. a. Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan $(\mathcal{P})$? Justifier. [0,5pt]

b. Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ est incluse dans le plan $(\mathcal{P})$. [0,75pt]

2. Soit $(\mathcal{Q})$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$. [0,75pt]

b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $(\mathcal{Q})$ et de la droite $(\mathcal{D})$. [0,75pt]

c. Montrer que $CI = \sqrt{3}$. [0,75pt]

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathcal{D})$ de coordonnées $(-t + 1 ; 2t ; -t + 2)$.

a. Vérifier que pour tout nombre réel t , $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$. [0,75pt]

b. Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels. [0,75pt]

EXERCICE 4

4 points

1. Résoudre l'inéquation suivante : [1pt]

$$(1) \quad \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + \sqrt{x+1} + 1}} + 1$$

2. Déterminer l'ensemble de définition, puis calculer les limites aux bornes de ces ensembles pour chacune des fonctions suivantes : [3pts]

a. $f(x) = \ln |\ln x|$;

c. $h(x) = 2 \ln(x |\ln x|)$;

b. $g(x) = \ln \left| \frac{mx+1}{x+m} \right|$, $m \in \mathbb{R}^+$;

d. $q(x) = \ln \frac{x+3}{1-x^2}$.