Lycée de Bepanda
Département de Mathématiques	Année scolaire : 2009/2010

Classe : $T^{le}C$ Durée : 4h ; coef : 5

Epreuve de Mathématiques. 3^{eme} séquence

L'épreuve comporte trois exercices et un problème à trois parties A B et C indépendantes.

Exercice 1. *(ARITHMETIQUE)**(3pts)***

1. (a) Déterminer tous les diviseurs de 28. [0,5pt]
   (b) Comparer la somme de tous les diviseurs de 28 et 28 (on dit que 28 est un nombre parfait). [0,5pt]
2. n est un entier naturel non nul. On pose $A = 2^n - 1$. Déterminer en fonction de n l'ensemble de tous les diviseurs de A. [0,5pt]
3. On suppose que, pour tout entier naturel non nul, 2^n-1 est premier et on pose $B = 2^{n-1}(2^n-1)$.
   (a) Déterminer en fonction de n l'ensemble de tous les diviseurs de B et déterminer leur somme. [1pt]
   (b) En déduire que B est un nombre parfait. [0,5pt]

Exercice 2 (4pts).

EFG est le triangle rectangle-isocèle de sommet E et de côté a; a étant un réel strictement positif.

1. Utiliser les propriétés des isométries pour inscrire dans le triangle EFG un triangle rectangle isocèle de sommet I tel que :I, J et K sont des points des segments respectifs $[EF]$, $[FG]$ et $[EG]$ privés des points E, F et G.
   (On expliquera clairement son programme de construction). [0,75pt]
2. f est l'application du plan définie par $f(A) = I$; $f(B) = J$ et $f(C) = K$.
   (a) f est-elle une application affine. [0,25pt]
   (b) f est-elle une isométrie ? [0,25pt]
3. Déterminer une isométrie g telle que $f \circ g(E) = E$ $f \circ g(F) = G$ et $f \circ g(G) = F$ [0,5pt]
4. On considère le repère $(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG})$.
   (a) Donner dans ces conditions l'expression analytique de f. [0,5pt]
   (b) En déduire l'expression analytique de g. [0,5pt]
   (c) g est-elle une bijection ? Justifier. [0,5pt]
5. Le plan EFG est supposé complexe. Donner l'écriture compl exe de cacune des transformation f et g. [0,75pt]

Exercice 3 (3pts).

$ABCD$ est le carré de sens direct de centre O. P est le point du segment $[BC]$ distinct de B et Q l'intersection des droites (AP) et (CD) . La droite (d) perpendiculaire à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure en donnant clairement le programme de construction du carré $ABCD$ [0,5pt]
2. r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   (a) Préciser l'image de la droite (BC) par r. [0,5pt]
   (b) Déterminer les images de R et P par r. [0,5pt]
   (c) Donner la nature de chacun des triangles ARQ et APS. Ces deux triangles sont-ils isométriques ? Justifier ta réponse. [0,75pt]
3. Déterminer les lieux géométriques du point N, milieu de $[PS]$ quand P décrit le segment $[BC]$ privé du point B. [0,75pt]

PROBLEME(10pts)

Partie A

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les fonctions f_n qui sont définies pour $x \in]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{1 + n\ln x}{x^2}$

I Etude des fonctions f_n

1. Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n - 2 - 2n\ln x$. [0,75pt]
2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$ et étudier le signe de $f_n'(x)$. [0,75pt]
3. Etablir le tableau de variation de la fonction f_n. [0,75pt]

II Représentation graphique de quelques fonctions f_n.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) d'unité $5cm$. On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n. dans ce repère.

1. Tracer $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$
2. (a) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n? [0,75pt]
   (b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe $(\mathcal{C}_4)$ à partir de $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$. Tracer $(\mathcal{C}_4)$. [1pt]

Partie B : Encadrement de ln

On veut montrer que :$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$

1. Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \ln x$. Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$; puis en déduire que $\ln x \leq x - 1$. [1pt]
2. Soit g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$. Etudier les variations de g et en déduire que pour $x \in]0; +\infty[; 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$. [1pt]
3. (a) En déduire l'encadrement de $\ln x$ pour $x > 0$ [0,25pt]
   (b) Calculer l'amplitude de cet encadrement. [0,25pt]
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(x - 1) - (1 - \frac{1}{x}) \leq 10^{-1}$ [0,5pt]
   (d) En déduire que; si $0,8 \leq x \leq 1,3$; alors l'amplitude de l'encadrement est inférieure à 10^{-1}. [0,5pt]

Partie C

En utilisant la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \cos^5 x$. [0,75pt]

b) $g(x) = \sin^3 x \cos^n x$ où $n \in \mathbb{N}$. [0,75pt]