Ministère des Enseignements Secondaires
LYCÉE DE MAROUA KONGOLA
B.P. 329 MAROUA
Département de **Mathématiques**

ANNÉE SCOLAIRE 2009/2010
Classe : T$^{\text{le}}$C
Coef : 5 ; Durée : 4 h
Prof : M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°3 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / JANVIER 2010

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [**4points**] Fonctions logarithme et exponentielle

Répondre par **Vrai** ou **Faux**.(*Bonne réponse :* 0.5pt ; *Mauvaise réponse ou pas de réponse :* 0pt)

1. f désigne la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} - ln(1+e^x)$, $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative.
   - a. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$
   - b. La limite de f en $+\infty$ est nulle.
   - c. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
   - d. La droite d'équation $y = 1 + x$, est asymptote à $\mathcal{C}$.
2. f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$, $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative.
   - a. f est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $[\frac{e^3}{27};+\infty]$.
   - b. La droite Δ d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.
   - c. $\mathcal{C}$ admet une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   - d. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2ex - e$.

Exercice 2 [**5points**] PPCM, PGCD, nombres premiers.

On se propose de résoudre le système suivant dont l'inconnue est le couple (x,y) d'entiers naturels non nuls tels que $x > y$ $\begin{cases} (x-y)^2 = x + y & (1) \\ PPCM(x,y) = 495 & (2) \end{cases}$

1. (Résolution de (1)).
   On pose $z = x - y$ et on considère comme nouvelle inconnue le couple (z,y).
   - a. Quelle relation vérifie z et y ? 0.5pt
   - b. En déduire que $2y$ est un produit de deux entiers consécutifs. 0.5pt
   - c. En déduire que les solutions de l'équation (1) sont de l'une des formes suivantes :
     $\begin{cases} x = k(2k+1) \\ y = k(2k-1) \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ ou bien $\begin{cases} x = (k+1)(2k+1) \\ y = k(2k+1) \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ 1pt
2. (Résolution du système).
   On suppose que les solutions du système sont sous la forme : $\begin{cases} x = k(2k+1) \\ y = k(2k-1) \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$
   - a. Donner en fonction de k, le PGCD de x et y. 1pt
   - b. En déduire le PPCM de x et y en fonction de k. 0.5pt
   - c. Montrer que le double de ce PPCM est le produit de 3 entiers consécutifs. 0.5pt
   - d. Résoudre dans ce cas le système. 1pt

Problème [11points]

On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et définie par : $f(x)=\frac{1}{4}x-1+\dfrac{\ln x}{x}$.
$(\mathscr{C})$ est sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Unité graphique 2 cm.

Partie A :

On considère la fonction u dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et définie par : $u(x)=x^2+4-4\ln x$.

1. Étudier les variations de u. 1.5 pt
2. Justifier que : $\forall x\in]0\,;+\infty[,\ u(x)>0$. 0.5 pt

Partie B :

1. Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat. 2× 0.25pt
2. a. Calculer la limite de f en $+\infty$. 0.25 pt
   b. Démontrer que la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{4}x-1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$. 0.5 pt
3. a. Vérifier que : $\forall x\in\ ]0\,;+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{u(x)}{4x^2}$. 0.5 pt
   b. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. 1pt
4. a. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α tel que $1<\alpha<\mathrm{e}$. 0.5 pt
   b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α. 0.5 pt
5. a. Démontrer qu'il existe un point unique A de $(\mathscr{C})$ où la tangente (T) est parallèle à la droite (D). 0.5pt
   b. Donner les coordonnées du point A. 0.5pt
6. a. Étudier la position relative de (D) par rapport à $(\mathscr{C})$. 0.5 pt
   b. Construire (T), (D) et $(\mathscr{C})$. 1.5 pt

Partie C :

(*Extrait du Bac C 2008 Cameroun*)

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $12x-5y=3$ 0.75pt
2. On considère la suite de nombres complexes z_n définie par :
   $$\begin{cases} z_0=\mathrm{i} \\ \text{et } z_{n+1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z_n \text{ pour } n\geqslant 0\end{cases}$$
   . On désigne par M_n le point image de z_n dans le plan complexe d'origine O.
   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n=e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$. 1pt
   b. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels Mn appartient à la demi-droite $[Ox)$. 0.5 pt

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE