SÉQUENCE N°2 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / NOVEMBRE 2010

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4.5 pts]

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que: $z' = \frac{3+4i}{5}z + \frac{1-2i}{5}$

1. On note x et x' , y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z' .

Démontrer que:
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x - 4y + 1) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases} \quad 1\text{pt}$$

2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f . 0.5pt

- b. Quelle est la nature de l'application f . 0.5pt

3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe z tels que z' soit réel. 0.5pt

4. On cherche à déterminer les points de $\mathcal{D}$ dont les coordonnées sont entières.

- a. Donner une solution particulière $(x_0; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x + 3y = 2$. 0.5pt

- b. Déterminer l'ensemble de solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x + 3y = 2$. 0.5pt

5. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z' . Déterminer les entiers y tels que $Re(z')$ et $Im(z')$ soient entiers. (On pourra utiliser les congruences modulo 5) 1pt

Exercice 2 [5.5pts]

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(3; -2; 2)$, $B(6; 1; 5)$, $C(6; -2; -1)$; $D(0; 4; -1)$.

1. Déterminer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et en déduire que les points A , B , et C sont trois points non alignés. 1pt

2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A . 0.5pt

- b. Écrire une équation cartésienne du plan (P_1) orthogonale à la droite (AC) et passant par A . 0.5pt

- c. Vérifier que le plan (P_2) d'équation $x + y + z - 3 = 0$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A . 0.5pt

3. a. Écrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon $R = 5\sqrt{3}$. 0.5pt

- b. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $L = (S) \cap (P_2)$. 1pt

4. a. Calculer les produits scalaires $\vec{AD} \cdot \vec{AB}$ et $\vec{AD} \cdot \vec{AC}$. En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC) . 1pt

- b. On rappelle que le volume du tétraèdre $ABCD$ est $V = \frac{1}{3} \text{aire}(ABC) \times AD$. Déterminer alors ce volume. 0.5pt

Partie A :

Soit la fonction numérique $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition Df de f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 1.5pt
2. On considère la fonction $g : x \mapsto (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}) \sin(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$
 - a. Justifier que: $\forall x \in Df, g(x) = 2 \frac{\sin f(x)}{f(x)}$. 0.5pt
 - b. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. 0.5pt
 - c. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \sin(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})]$. 1.5pt

Partie B :

1. Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.
 - a. Étudier les variations de u sur $]0 ; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$. 1.5 pt
 - b.
 - i. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0 ; +\infty[$. 0.25 pt
On note α cette solution.
 - ii. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α . 0.5 pt
 - c. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x . 0.5 pt
 - d. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$. 0.25 pt
2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$.
 - a. Exprimer, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$. 0.5 pt
 - b. En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$. 0.25 pt
3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note :
 - Γ la courbe représentative de la fonction $\ln$ (logarithme népérien);
 - A le point de coordonnées $(0 ; 2)$;
 - M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0 ; +\infty[$.
 - a. Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$. 0.5 pt
 - b. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
 - i. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0 ; +\infty[$. 0.5 pt
 - ii. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ , noté P , dont on précisera les coordonnées. 0.5 pt
 - iii. Montrer que $AP = \alpha \sqrt{1 + \alpha^2}$. 0.5 pt
 - c. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ? 0.25 pt