Republique du Cameroun
. Paix-Travail-Patrie
Ministère de l'Enseignement Supérieur
. Université de Douala
Faculté de Génie Industriel

Republic of Cameroon
Peace-Work-fatherland
Ministry Of Higher Education
University Of Douala
Faculty Of Industrial Engineering

Année Académique 2010-2011
Academic Year 2010-2011

CONCOURS D'ENTREE EN 1$^{\text{ERE}}$ ANNEE, SESSION DE SEPTEMPBRE 2010
FIRST YEAR ENTRANCE EXAMINATION, SEPTEMBER SESSION 2010

EPREUVE DE (PAPER OF) : MATHEMATIQUES (METHEMATICS) BAC : C,D,E et GCE A-Level
Durée (Time) : 3 heures (hours)

Exercice 1 [6points]

I- on considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t dt.$$

1. (a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs et étudier ses variations.
   (b) Que peut-on déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $x_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite (x_n).
3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin 1$.
   (b) En déduire que $\lim n \to +\infty y_n = 0$.
4. On admet que $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos 1.$.
   Déterminer $\lim n \to +\infty n x_n$ et $\lim_{n\to+\infty} n y_n$.

II- Résoudre l'équation (E) : $f'(x) = 1 + f(-x)$ et rechercher une solution particulière à l'équation complète.

Exercice 2 [6points]

Un groupe d'étudiants ingénieurs de la FGI désire doter leur drone (avion) de réacteurs. Ils ont le choix entre un birécteur et un quadrirécteur. Ceux ci décident de mener une étude (probabiliste) sur la fiabilité des types de d'avions.
Soit p la probabilité qu'une panne survienne à l'un de ces réacteurs (*p est un réel strictement compris entre* 0 *et* 1). On suppose que les avaries pouvant survenir sur les réacteurs sont indépendantes les unes des autres. Soient X la variable aléatoire associée au nombre de réacteurs ayant une panne sur un biréacteur et Y la variable aléatoire égale au nombre de réacteurs ayant une panne sur un quadriréacteur.
s

1. Déterminer en fonction de p la loi de X ainsi que celle de Y.
2. Sachant qu'un avion peut poursuivre son vol sans escale si au moins la moitié de ses réacteurs fonctionnent,
   (a) Calculer les probabilités P_B et P_Q pour qu'un biréacteur ou un quadriréacteur achève son vol après une avarie.

(b) Déterminer $P_B - P_Q$ en fonction de p.

(c) Indiquer suivant les valeurs de p quel type d'avion présente la meilleure fiabilité.

Exercice 3 **[8points]**

On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $[0;1]$ et vérifiant les conditions :
- f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$; (C_1)
- $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, (C_2)
- $\forall x \in [0;1]$, $f(x) \leq x$. (C_3)

A toute fonction f de (E), on associe le nombre réel $I_f = \displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]dx$.

1. Montrer que pour toute fonction $f \in E$, $I_f \geq 0$.
2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $h(x) = 2^x - 1$. (*On rappelle que pour tout réel x, $2^x = e^{x \ln 1}$*)
   (a) Montrer que la fonction h vérifie les conditions (C_1) et (C_2).
   (b) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = 2^x - x - 1$. Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $g(x) \leq 0$. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction g sur $[0;1]$).
   (c) En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).
   (d) Démontrer que I_h associé à la fonction h est égal à $\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.
3. Soit P une fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels tels que $0 < a < 1$. On se propose de déterminer les valeurs des réels a, b et c pour que P appartienne à (E) et que $I_P = I_h$.
   (a) Montrer que la fonction P vérifie la propriété (C_2) si et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$.
   Montrer que toute fonction P définie sur $[0;1]$ par $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$ avec $0 < a < 1$ appartient à (E).
   (b) Exprimer en fonction de a le réel I_P associé à la fonction P.
   (c) Montrer qu'il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$. Quelle est cette valeur ?