Classe : $\mathbf{T^{le}C}$ Durée : 4h ; coef : 5
Samedi, 3 Octobre 2009
Epreuve de Mathématiques. $\mathbf{1^{ere}}$ séquence
Examinateur : **NJIONOU S. P**

L'épreuve comporte quatre exercices, tous obligatoires. L'élève devra justifier autant que possible ses affirmations.

Exercice 1 (6pts).

On admet qu'étant donné deux entiers naturels a et b non nuls, si $PGCD(a;b)=1$, alors $PGCD(a^2,b^2)=1$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la suite S_n par $S_n=\sum_{p=0}^{n}p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand diviseur commun de S_n et S_{n+1} ($PGCD(S_n,S_{n+1})$).

1. Démontrer par récurrence que $S_n=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$. [1pt]
2. On suppose que n est pair. Soit $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $n=2k$.
   (a) Démontrer que $PGCD(S_{2k},S_{2k+1})=(2k+1)^2PGCD(k^2,(k+1)^2)$. [1pt]
   (b) Calculer $PGCD(k,k+1)$. [0.5pt]
   (c) Calculer $PGCD(S_{2k},S_{2k+1})$. [0.75pt]
3. On suppose que n est impair. Soit $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $n=2k+1$.
   (a) Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux. [1pt]
   (b) Calculer $PGCD(S_{2k+1},S_{2k+2})$. [1pt]
4. Existe t-il un entier naturel n pour lequel S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux ? [0.75pt]

Exercice 2 (2pts).

Soit m un entier naturel non nul. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $(m+1)^n-1$ est un multiple de m.

Exercice 3 (6pts).

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires. [1pt]
   On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2).
   Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est : [1pt]

$$\begin{cases} x = -7+2t \\ y = -8+3t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = t \end{cases}$$

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9\,;\,-4\,;\,-1)$.
   (a) Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2). [0.5pt]
   (b) Exprimer AM^2 en fonction de t. [0.5pt]
   (c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.
   - Étudier les variations de f. [0.5pt]
   - Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ? [0.5pt]
     Dans la suite, on désignera ce point par I.
   - Préciser les coordonnées du point I. [0.5pt]
4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.
   (a) Déterminer une équation de (Q). [0.5pt]
   (b) Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D). [1pt]

Exercice 4 (6pts)**.**

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté $ABCDEFGH$ et représenté sur l'annexe.

Soit I le barycentre des points pondérés $(E; 2)$ et $(F; 1)$, J celui de $(F; 1)$ et $(B; 2)$ et enfin K celui de $(G; 2)$ et $(C; 1)$.

On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J et K. On note Δ cet ensemble.

1. Placer les points l, J et K sur la figure de **l'annexe qui sera rendue avec la copie.** [1pt]
2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ? [0.5pt]

   Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant : $\left(\text{A}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$.
3. Donner les coordonnées des points I, J et K. [0.75pt]
4. Soit $P(2\,;\,0\,;\,0)$ et $Q(1\,;\,3\,;\,3)$ deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK). [0.75pt]
5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.
   (a) Démontrer que M appartient à Δ si, et seulement si, le triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ?[1pt]
   (b) Vérifier que P et Q appartiennent à Δ. Tracer Δ sur la figure. [1pt]
6. (a) Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan. [1pt]
   (b) Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω. [0.5pt]

« Les hommes sont comme les chiffres, ils n'acquièrent de valeur que par leur position. »
Travaillez, travaillez par vous même, c'est là la clé du succès.

ANNEXE 1

À RENDRE AGRAFÉE À LA COPIE

Figure de l'exercice 5