

Classe : **T^{le}C** Durée : 4h ; coef : 5

Mars 2010

Epreuve de Mathématiques. 4^{ème} séquence

Examineur : **NJIONOU S. P**

L'épreuve comporte trois exercices et un problème, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et la cohérence dans le raisonnement seront prises en compte lors de l'évaluation de la copie.

Exercice 1 (4pts).

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_n$ définie par son premier terme $u_0 = 2$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \text{ vérifiée pour tout entier naturel } n.$$

Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de n .

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . [0.5pt]

2. On admet qu'il existe une suite $(a_n)_n$ unique telle que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{3a_n - 1}{3a_n - 2}.$$

(a) Montrer que $a_0 = 1$. [0.25pt]

(b) Exprimer u_{n+1} en fonction de a_{n+1} , puis de a_n et en déduire que la suite $(a_n)_n$ vérifie pour tout n entier naturel, la relation : $a_{n+1} = 3a_n - 1$. [1pt]

3. Soit (b_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $b_n = a_n - \frac{1}{2}$.

(a) Montrer que la suite $(b_n)_n$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $b_0 = \frac{1}{2}$. [0.75pt]

(b) Calculer b_n en fonction de n . [0.5pt]

(c) En déduire l'expression de a_n , puis celle de u_n en fonction de n . [0.75pt]

(d) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$. [0.25pt]

Exercice 2 (5pts).

On donne la propriété suivante :

« par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

Sur la figure donnée en annexe, on a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.

On a placé :

les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

le milieu K de [IJ].

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).

Partie A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F. En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales. [0.5pt]

On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.

2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK). [0.5pt]

3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP). [0.5pt]

4. (a) Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires. [0.5pt]

(b) En déduire que les points F, P et K sont alignés. [0.5pt]

Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB) .

On note $(x ; y ; 0)$ les coordonnées du point N .

1. Donner les coordonnées des points F , G , I et J . [0.5pt]
2. (a) Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ) . [0.5pt]
(b) Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FJ}$ en fonction de x et y . [0.5pt]
(c) Déterminer les coordonnées du point N . [0.5pt]
3. Placer alors le point P sur la figure en annexe. [0.5pt]

Problème (11pts).

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E) : \quad x f'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2.$$

1. (a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y' = 2y + 8$. [1pt]
(b) Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E) . [1pt]
2. (a) Résoudre l'équation $y' = 2y$. [0.5pt]
(b) Déterminer une solution particulière de l'équation $y' = 2y + 8$. [0.5pt]
(c) Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E) . [0.75pt]
3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(\ln 2 ; 0)$? Si oui la préciser. [0.25pt]

Partie B. Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(e^{2x} - 4)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f . [0.5pt]
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. [1pt]
3. Calculer la dérivée de f et en déduire son tableau de variation. [1pt]
4. Montrer que la courbe (C_f) représentative de f admet une asymptote oblique (T) en $-\infty$ dont on déterminera une équation. [0.5pt]
5. Construire (C_f) et (T) dans un même repère. [0.5pt]

Partie C. Calcul d'une aire

On considère toujours la fonction f définie dans la partie B ci-dessus.

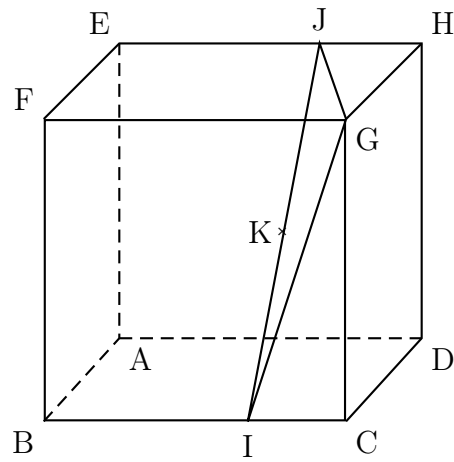
1. Soit $h(x) = xe^{2x}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $H(x) = (ax + b)e^{2x}$ soit une primitive de h sur $\mathbb{R}$. [1pt]
2. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. [1pt]
3. Evaluer l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ et interpréter sa valeur. [1pt]

« Il faut d'abord faire ce qu'on sait faire, ensuite, faire ce qu'on peut faire. »
Travaillez, travaillez par vous même, c'est là la clé du succès.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Exercice 2



Nom(s) et prénom(s) :