Ministère des Enseignements Secondaires
Lycée de Maroua Kongola
B.P. 329 Maroua
Département de **Mathématiques**

Année Scolaire 2009/2010
Classe : $T^{le}C$
Coef : 5 ; Durée : 4 h
Prof : M. Loumsia A.

BACCALAUREAT BLANC / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / MAI 2011

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4 points]

I- Soit a et b deux entiers naturels non nuls tel que $a > b$. On désigne par δ et μ leur pgcd et leur ppcm.

1. Soit n un entier naturel non nul. On donne : $a = (n+1)(2n+1)$ et $b = n(2n+1)$.

a. Déterminer δ et μ en fonction de n. 0.5pt

b. Vérifier que $\delta = a - b$ et $\mu(a+b) = ab\delta$. 0.5pt

2. Réciproquement, soit a et b deux entiers naturels tels que $\delta = a - b$ et $\mu(a+b) = ab\delta$

a. On note a' et b' les entiers naturels tels que : $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$.
Démontrer que : $a' - b' = 1$ et $a' + b' = \delta$. 0.5 pt

b. Déduisez-en que δ est un nombre entier impair. 0.5pt

II- L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On donne les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{e}_3 = \vec{k} - \vec{j}$.

1. Démontrer que $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_2)$ est une base de l'ensemble $\mathscr{W}$ des vecteurs de l'espace. 0.5pt

2. On considère f l'endomorphisme de $\mathscr{W}$ définie par $f(\vec{u}) = (x-y)\vec{e}_1 + (2x-z)\vec{e}_2 + y\vec{e}_3$.

a. Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. 0.5pt

b. Déterminer $Kerf$ et Imf. 2×0.5pt

Exercice 2 [5 points]

Le plan $(\mathscr{P})$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 1cm. Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$

1. a. Dterminer l'écriture complexe de f. 0.5pt

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. 1pt

2. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que : $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64$ et (Γ') son image par f.

a. Dterminer une équation cartésienne de (Γ'). 0.75pt

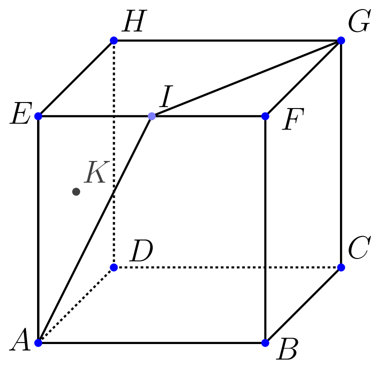
b. Dterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ'). 0.75pt

c. En déduire que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et l'excentricité. 1pt

d. Construire (Γ) et (Γ') dans le plan. 1pt

Problème [11points]

Partie A : Soit le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous : L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{AE}\right)$. On désigne par I le milieu du segment $[EF]$ et par K le centre du carré $ADHE$.



1. a. Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$. 0.5pt

b. En déduire l'aire du triangle IGA. 0.5 pt

2. a. Calculer le volume du tétraèdre $ABIG$. 0.5pt

b. Quelle est la distance du point B au plan (AIG) ? 0.5pt

3. Donner une équation cartésienne du plan (AIG). 0.5pt

4. Donner l'expression analytique du demi-tours S d'axe (BK). 0.5pt

5. Donner l'expression analytique de la symétrie orthogonale S' par rapport au plan (AIG). 0.5pt

6. Déterminer l'intersection de la droite (BK) et du plan (AIG). 0.5pt

7. Donner la nature et l'élément caractéristique de $S \circ S'$. 0.5pt

8. Quelle est l'image du triangle IGA par l'application $S \circ S'$? 0.5pt

Partie B :

On considre la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations. 2.5pts

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$. 0.5pt

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$. 0.5pt

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. 0.5pt

3. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+3)]^2$.

a. Justifier la dérivabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$. 0.5pt

b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer I_n. 0.5pt

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ? 1pt