MINESEC/DRL/DDSM	EPREUVE DE MATHS	Devoir 5 : Séquence 3
LYCEE DE NDOM	Niveau: Tle; Série :C	Année Scolaire 2010/2011
Dépmt de Mathématiques	Coef :5	Durée : 4 hrs

L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 à 2.
Le candidat devra obligatoirement traiter l'épreuve. La qualité et le soin apportés au tracé de la courbe seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1: ($4pts$)
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, (D) désigne la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ et F le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

1. a) Ecrire une équation cartésienne de la parabole (P) de foyer F et de directrice (D) ($1pt$)
b) Trace (P) ($0,75pt$)
2) On note A le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$, A' le projeté orthogonal de A sur (D) et (Δ) la tangente à (P) en A
$a)$ Ecrire une équation cartésienne de (Δ). ($0,5pt$)
$b)$ Démontrer que (Δ) est la bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AF}}\right)$.
3) $a)$ Préciser la nature du triangle $AA'F$
b) En déduire que les points F et A' sont symétriques par rapport à (Δ). ($0,75pt$)

Exercice 2: ($5pts$)
Dans le plan orienté, on considère le triangle équilatéral ABC tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$
On note: D, le symétrique de B par rapport à la droite (AC);
R, la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ qui transforme A en C
E, l'image de B par R.
1) a) Quelle est la nature précise du quadrilatère $ABCD$? ($0,5pt$)
b) Démontrer que D est centre de la rotation R. ($0,5pt$)
c) Démontrer que C est milieu du segment $[AE]$. ($1pt$)
2) A tout point M de $[AB]$ distinct de A et de B, on associe le point M' de $[CE]$ tel que $AM = CM'$.
Démontrer que le triangle DMM' est équilatéral ($0,5pt$)
3) Soit G l'isobarycentre du triangle DMM' et s la similitude directe plane de centre D qui transforme M en G.
$a)$ Préciser le rapport et l'angle de s. ($1pt$)
$b)$ Démontrer que $s(B) = C$. ($0,5pt$)
$c)$ Construire le point A' image de A par s. ($0,5pt$)
$d)$ Démontrer que les points C, G et A' sont alignés ($0,75pt$)

Problème: ($11pts$)
Le problème comporte deux parties indépendantes A et B, le candidat devra traiter les deux parties

Partie A ($3pts$)
E est un espace vectoriel, $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base de E. f l'endomorphisme de E définie
Pour $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ $\quad f(\overrightarrow{u}) = (x+4y)\overrightarrow{i} + (2x-y)\overrightarrow{j}$.
1) a) Déterminer la matrice M de f dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. ($0,5pt$)
b) f est – elle bijective ? Pourquoi ? ($0,5pt$)
2) On définit les ensembles F et G par :$F = \{\overrightarrow{u} \in E / 2x - y = 0\}$ et $G = \{\overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = 3\overrightarrow{u}\}$.

a) Montrer que F est un sous – espace vectoriel de E et donner une base $\overrightarrow{e_1}$. $(1pt)$
b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ appartient à G. $(0,5pt)$
c) Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base.E $(0,5pt)$

Partie B $(8pts)$

Dans tout ce problème on note:

· f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \ln\sqrt{x}$;

· g la fonction définie dans l'intervalle $[2,3]$ par $g(x) = x - f(x)$

· la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

I. Etude des propriétés des fonctions f et g

1. Dresser le tableau de variation de f. $(1,5pt)$

2. a) Démontrer que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en un unique point A, on notera x_0 l'abscisse de A $(0,5pt)$

b) Démontrer que x_0 appartient à l'intervalle $[1,71875; 1,72875]$ $(0,5pt)$

c) En déduire que $|x_0 - 1,72375| < 10^{-2}$
et donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près. $(0,75pt)$

3. Démontrer que:

a) $g(x_0) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$

b) L'image par g de l'intervalle $[1;2]$ est contenue dans . $(1pt)$

c) Pour tout x de $[1,2]$, $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ $(0,5pt)$

II. Etude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$ $(0,75pt)$

2. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$ $|u_{n+1} - x_0| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - x_0|$ $(0,5pt)$

3. a) En déduire pa récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$ $|u_n - x_0| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ $(0,75pt)$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer la limite $(0,75pt)$

c) Démontrer que u_3 est une valeur approchée de x_0 à 125.10^{-3} près. $(0,5pt)$

"Travaillez prenez de la peine... car le succès se trouve au bout de l'effort "

Moualeu Dany Pascal (PLEG Maths)