UNIVERSITE DE YAOUNDE I

Ecole Normale Supérieure de Yaoundé

Concours d'entrée en première année du premier cycle

Série : Mathématiques **Epreuve** : Analyse-Algèbre-Probabilités **Durée** : 3h **Session :** 2012

Exercice 1/ 5 points

1. Soit (u_n) la suite définie comme suit $u_n = n - 2011$ si $n \geq 4026$ et $u_n = u_{u_{n+2012}}$ si $n \leq 4025$.
   (a) Déterminer u_{5000} et u_{4024}. [1pt]
   (b) Montrer que si $2014 \leq n \leq 4025$, alors $u_n = u_{n+1}$. [1pt]
   (c) Déterminer u_0. [1pt]
2. Soit (v_n) une suite telle que $v_{n+m} = |v_n||v_m|$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$. [0,5pt]
   (b) En déduire que (v_n) est une suite géométrique. [0,5pt]
   (c) Déterminer v_0 et exprimer v_n en fonction de n sachant que $v_3 = 64$. [1pt]

Exercice 2/ 5 points

Pour tout couple de réels, on définit la fonction $h_{a,b}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $h_{a,b}(x) = (ax+b)e^{-2x}$. On désigne par E l'ensemble de toutes les fonctions $h_{a,b}$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que pour tout (a,b), $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $h_{a,b} + h_{c,d} \in E$ et $\lambda h_{a,b} \in E$. [1pt]
   On admet que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.
2. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = xe^{-2x}$.
   Montrer que $B = (u, v)$ est une base de E. [1pt]
3. Soit ψ l'application qui à tout $h \in E$ associe $\psi(h) = h' - h$, où h' est la dérivée de h.
   (a) Montrer que pour tout $h \in E$, $\psi(h) \in E$. [0,5pt]
   (b) Montrer que ψ est un endormorphisme de E. [1pt]
   (c) Déterminer la matrice M de ψ par rapport à la base B. [0,5pt]
4. Déterminer l'élément g de E solution de l'équation différentielle $y' - y = (-3x+4)e^{-2x}$. [1pt]

Exercice 3/ 6 points

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\star$, on définit la fonction F_λ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $F_\lambda(x) = \lambda x - \lambda^2 x^2 \ln(\lambda x)$.

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition D_λ de f_λ en fonction de λ. [0,5pt]
2. Déterminer la dérivée F_1' de la fonction F_1 et exprimer $F_\lambda(x)$ en fonction de $F_1(x)$. [1pt]
3. Montrer que $F_1'(x)$ garde un signe constant sur tout intervalle de $D_1 \setminus \{1\}$. [1pt]
4. En déduire le tableau de variation de F_λ suivant les valeurs de λ. [1pt]

Partie B

Soit (C_λ) la courbe de F_λ dans un repère orthonormé (unité $1cm$).

1. Montrer que l'équation $F_1(x) = 0$ admet une unique solution notée x_1. [0,5pt]
2. Construire (C_1) et $(C_{-1/2})$ dans un même repère. [1pt]
3. Soit (D) le domaine délimité d'une part par (C_1) et l'axe des abscisses, puis d'autre part par les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_1$.
   Montrer que $d = A(x_1)^3 + B(x_1)^2 + 1$ où A, B et C sont des rationnels à déterminer. [1pt]

Exercice 4/ 4 points

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $x^4 + 2x^2 + 4 = 0$.

(a) Résoudre l'équation (E). On mettra les solutions sous forme algébrique. [1,5pt]

(b) En déduire que pour tout réel x, $x^2 + 2x^2 + 4 = (x^2 + ax + b)(x^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des réels à déterminer. [0,5pt]

2. Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher numérotée de 1 à 20. Une expérience consiste à tirer de l'urne et à calculer $(\sqrt{2} + i\sqrt{6})^n$ où n est le numéro de la bille tirée. La bille est remise dans l'urne avant le tirage suivant.

   (a) Déterminer la probabilité d'obtenir en un tirage un réel positif. [1pt]

   (b) Déterminer la probabilité d'obtenir un réel strictement positif en trois tirages au plus. [1pt]