MINESEC
Lycée de Nkolnda–Nsimalen
Département de Mathématiques
www.easy-maths.org

Année scolaire : 2012-2013
Classe : T^{le} C **Durée : 4 heures**
Séquence 3 **19 Janvier 2013**
Coefficient : 05

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric TCHAPNGA**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **3,5 points**

On considère les suites (I_n) et (J_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx} \sin x \,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx} \cos x \,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et J_0. **0,5 pt**
2. On suppose que $n \geq 1$.
   a. En utilisant une intégration par partieS, montrer que $\mathrm{I}_n + n\mathrm{J}_n = 1$ et $-n\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n = \mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}}$. **1,5 pt**
   b. Déduire de **2.a** l'expression de I_n et J_n en fonction de l'entier neturel n. **1 pt**
3. Les suites (I_n) et (J_n) sont-elles convergentes ? **0,5 pt**

EXERCICE II **5 points**

I - Repondre aux questions suivantes :

1. Resoudre dans $\mathbb{R}$:
   (a) : $\ln(x^2+4x-5) = \ln(x+1)$; (b) : $2.8^x - 9.4^x + 3.2^x + 4 = 0$. **1 pt**
2. Ecrire le nombre 2012 dans le système de numération de base 8. **0,5 pt**
3. Effectuer l'opération suivante : $\overline{133}^5 \times \overline{2431}^5$. **0,5 pt**
4. Soit θ un réel tel que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.
   Déterminer le module et l'argument de $Z = 1 - \mathrm{i}\tan\theta$. **1 pt**

II - Soit z un nombre complexe distinct de 4. Soit Z un nombre complexe tel que $Z = \dfrac{\mathrm{i}z-4}{z-4}$.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y. **1 pt**
2. Déterminer l'ensemble (C) des points M(z) tel que Z soit réel. Reconnaître la nature de (C) et caractériser cet ensemble. **0,5 pt**
3. Déterminer l'ensemble (D) des points M(z) tel que Z soit imaginaire pur. **0,5 pt**

EXERCICE III **3,5 points**

A et B sont deux points distincts du plan orienté. On designe par r_A la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ et r_B la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Soit M un point du plan M_1 son image par r_A et M_2 son image par r_B.

1. Montrer que, le milieu J du segment $[M_1M_2]$ est fixe par $r_B \circ r_A^{-1}$. **0,5 pt**
2. Montrer que J appartient au cercle de diamètre [AB]. **0,75 pt**
3. On suppose que M est distinct des points A et B.
   - **a.** Exprimer $\left(\widehat{\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}}\right)$ en fonction de $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)$. **0,5 pt**
   - **b.** Montrer que les points M, M_1 et M_2 sont alignés ssi $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **1 pt**
   - **c.** Déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 sont alignés. **0,75 pt**

PROBLEME **8 points**

Le problème comporte trois parties A, B et C.

Partie A :

1. Soit la fonction h_1 définie par : $h_1(x) = x - \ln x$.
   - **a.** Dresser le tableau des variationd de h_1. **0,5 pt**
   - **b.** En déduire le signe de h_1. **0,75 pt**
2. On définit la fonction f_1 par : $f_1(x) = \dfrac{x}{x - \ln x}$.
   Dresser le tableau des variationd de f_1. **0,5 pt**

Partie B : Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \text{ et } g(x) = (\ln x)^2.$$

On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de g.
2. **a.** Étudier le signe de $(\ln x)(1 - \ln x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **b.** En déduire la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **c.** Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un même repère orthogonal.
3. Pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, M est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N est le point de $\mathscr{C}'$ de même abscisse.
   - **a.** Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
     Étudier les variations de la fonction h sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **b.** En déduire que sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.
   - **c.** Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.
   - **d.** En déduire que, sur $]0;1[\cup]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$, il existe deux réels a et b $(a < b)$ pour lesquels la distance MN est égale à 1.
4. **a. Restitution organisée de connaissances**
   Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
   - **b.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$. En déduire une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction logarithme népérien.

c. À l'aide d'une intégration par parties, et en utilisant le résultat prédent, calculer pour tout réel $x > 0$, $\int_1^x \ln t \times \ln t \, \mathrm{d}t$.

d. On considère la partie du plan délimitée par les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ en unités d'aire de cette partie du plan.

Partie C :

1. Montrer que, pour tout x appartenant à I, $f(x)$ appartient à I. **0,5 pt**

2. Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_n = f(U_{n-1}) \quad \text{pour tout } n > 1 \end{cases}$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $U_n \in I$. **0,5 pt**

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$. **0,5 pt**

c. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :
$\forall n > 1, \quad |U_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$. **0,5 pt**

d. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad |U_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. **0,5 pt**

e. En déduire que (U_n) converge vers α. **0,25 pt**

f. A priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près ? **0,5pt**

3. En utilisant la décroissance de f, montrer que α est compris entre deux termes consécutifs quelconques de la suite. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-7}. **0,5 pt**