

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : Romaric TCHAPNGA

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I

4,5 Points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

0,75 pt + 1 pt + 0,75 pt

$$(a) : 2\ln x + \ln(2x - 1) - \ln(5x + 2) = 0 \quad (b) : -(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0 \quad (c) : \frac{e^{3x}}{e^{4x+1}} < 5.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $(\Sigma) : \begin{cases} 2x + 4y + z = 14 \\ x + y + z = 12 \\ 3x + y + 2z = 14 \end{cases}$.

1 pt

3. Dédurre les réels positifs x, y et z tels que : $\begin{cases} \ln(x^2 y^4 z) = 14 \\ \ln(x y z) = 12 \\ \ln(x^3 y z^2) = 14 \end{cases}$.

1 pt

EXERCICE II

5,5 Points

1. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^n < 10^{-2}$.

0,75 pt

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x - 3)^2}$.

a. Déterminer trois réels a, b et c tel que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, f(x) = a + \frac{b}{x - 3} + \frac{c}{(x - 3)^2}$.

1 pt

b. En déduire une primitive F de f sur $] -\infty; 3[$ qui prend la valeur 5 en 2.

0,75 pt

c. Calculer l'intégrale : $\int_{-4}^2 \frac{x^2 - 4x + 2}{(x - 3)^2} dx$.

1 pt

3. Calculer les limites suivantes :

1 pt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1} + \frac{x}{x-3}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x - 1} + 2x \right)$$

4. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1 pt

$$f : x \mapsto f(x) = e^{-x^2+x+7} + x^2; \quad g : x \mapsto g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}) \quad h : x \mapsto h(x) = x \ln(x^2 + 2).$$

PROBLEME**10 Points****Le problème comporte trois parties A, B et C.**

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ L'unité graphique est 2 centimètres.

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x \ln x - x + 1$ et C sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. **a.** Dresser le tableau des variations de g sur son ensemble de définition. **1 pt**
- b.** En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x . **0,5 pt**
2. **a.** Etudier les position relatives de la courbe (C) et la représentation graphique (C') de la fonction $x \mapsto \ln x$. **0,5 pt**
- b.** Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J = \int_1^e (x-1) \ln x \, dx$. **0,5 pt**

Partie B : Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln x$.

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1.. **0,5 pt**
2. Dresser le tableau de variation de f . On pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$. **1pt**
3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α et que $3,5 < \alpha < 3,6$. **0,5 pt**
4. Construire la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **1 pt**

Partie C : Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

1. Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$. **0,5 pt**
2. Etudier le sens de variation de h . **0,5 pt**
3. On pose $I = [3; 4]$. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a $h(x) \in I$ et $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$. **1 pt**
4. Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$ pour tout $n \geq 1$
 - a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$. **0,5 pt**
 - b.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$. **0,5 pt**
 - c.** En déduire, par un raisonnement par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$. **0,5 pt**
 - d.** En déduire que (U_n) converge vers α . **0,5 pt**
 - e.** Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a : $|u_n - \beta| \leq 10^{-2}$. **0,5 pt**