

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.

Exercice 1 (5points). Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1. (a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$. [0,5pt]
(b) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique. [0,5pt]
2. (a) Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2 - 2i$ et $z_C = 4$. Placer les points A, B et C dans le plan. [0,25pt]
(b) Calculer le rapport $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$; en déduire la nature du triangle CAB , puis celle du quadrilatère $AOBC$. [1pt]
3. Soit f la similitude directe du plan complexe qui laisse le point C invariant et qui transforme la point A en O .
(a) Donner l'écriture complexe de f . [1pt]
(b) Donner les éléments caractéristiques de f . [0,75pt]
Soit g la transformation de P dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 - i)z + 4i$.
(c) Ecrire sous forme algébrique, l'affixe de G' , image du barycentre G des points pondérés $(A, 3)$; $(B, 2)$ et $(C, -3)$ par g . [1pt]

Exercice 2 (4points). Une boîte contient 6 boules vertes et n boules blanches toutes indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer successivement sans remise deux boules de la boîte. Si les deux boules sont de même couleur, le joueur gagne 100F et si les boules sont de couleurs différentes, le jour perd 100F.

1. Dans cette question, on suppose $n = 3$
(a) Calculer la probabilité d'obtenir :
i. deux boules de même couleur; [0,5pt]
ii. deux boules de couleurs différentes. [0,5pt]
(b) Sachant que la première boule tirée est verte, quelle est la probabilité pour que la deuxième boule tirée soit verte? [0,5pt]
2. Dans cette question, l'entier naturel n est quelconque et supérieur à 3. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage successive sans remise de deux boules associe le gain algébrique en francs du joueur.
(a) Exprimer en fonction de n les probabilités des événements $[X = -100]$ et $[X = 100]$. [1pt]
(b) Montrer que l'espérance mathématique de X est $E(X) = 100 \frac{n^2 - 13n + 30}{(n+6)(n+5)}$. [0,5pt]
(c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $E(X) < 0$? [1pt]

Problème(11 points).

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > 1$, $f(x) > 1$. [0,5pt]

2. On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln v_n$.
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 1$. [0,5pt]
 - Calculer v_1 et w_1 . [0,5pt]
 - Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. [1pt]
 - Exprimer pour tout entier naturel n , w_n puis v_n en fonction de n . [0,75pt]
 - En déduire que $u_n = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^{2^n}}$; puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. [(0,5+0,25)pt]

Partie B :

Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = x^2 e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) avec pour unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$. [0,5pt]
 - Etudier le sens de variations de h . [1pt]
 - Construire la courbe (C) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . [0,75pt]
- Déterminer les nombres réels a , b et c pour que la fonction H définie par $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction h . [0,5pt]
 - Soit λ un réel strictement positif. Calculer le réel : $\int_0^\lambda h(x) dx$. [0,5pt]
 - $A(\lambda)$ est l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.
Déterminer $A(\lambda)$ puis calculer sa limite lorsque λ tend vers l'infini. [0,75pt]

Partie C :

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E) : y'' - 2y' + y = x - 2; \quad (E') : y'' - 2y' + y = 0.$$

On considère la fonction affine φ définie par $\varphi(x) = ax + b$.

- Déterminer a et b pour que la fonction φ soit solution de l'équation (E) . [0,5pt]
- Soit g une fonction au moins deux fois dérivable sur \mathbb{R} . Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - \varphi$ est solution de (E') . [0,75pt]
- Résoudre (E') . [0,75pt]
- En déduire les solutions de l'équation (E) . [0,75pt]