MINESEC
INSTITUT VICTOR HUGO
Département de Mathématiques

Année scolaire : 2015-2016
Classe : T^{le} C Durée : 3 heures
Séquence II Date : 06/11/ 2015
Coefficient : 05

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric TCHAPNGA**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **5,5 points**

1. **a.** Déterminer l'ensemble des primitives de fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants : **1 pt**
$a) -$ f : $x \longmapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{1+x^2+2x}}$, $I =]0;+\infty[$; $b) -$ f : $x \longmapsto 2(1-4\cos x)(3+2\sin x)$, $I =]0;+\infty[$

b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ dont la courbe admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation : $y = 2x+1$. **1 pt**

2. Étudier les branches infinies de la courbe de la fonction u : $x \longmapsto \mathrm{u}(x) = \dfrac{x+1}{2} + \sqrt{x^2-x+1}$. **1 pt**

3. Montrer que : $\forall x \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, on a : $1 - \dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \dfrac{x}{2}$. **1 pt**

4. Soit P la fonction de $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ vers $]1;+\infty[$, définie par : $\mathrm{p}(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.
a. Montrer que la fonction p admet une bijection réciproque p^{-1}. **0,5 pt**
b. Montrer que p^{-1} est dérivable sur $]1;+\infty[$ et déterminer la dérivée de la fonction p^{-1}. **0,75pt**

EXERCICE II **4 points**

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Montrer que, pour tout $n > 0$, on a : $\mathrm{S}_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$. **0,75 pt**
2. On suppose que n est pair. Soit q l'entier naturel non nul tel que $n = 2q$.
a. Montrer que $\mathrm{PGCD}(\mathrm{S}_{2q} ; \mathrm{S}_{2q+1}) = (2q+1)^2\mathrm{PGCD}\left(q^2 ; (q+1)^2\right)$. **0,75 pt**
b. Calculer PGCD $(q ; q+1)$.Puis calculer $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{S}_{2q} ; \mathrm{S}_{2q+1}\right)$. **1 pt**
3. On suppose que n est impair. Soit q l'entier naturel non nul tel que $n = 2q+1$.
a. Montrer que les entiers $2q+1$ et $2q+3$ sont premiers entre eux. **0,25 pt**
b. Calculer $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{S}_{2q+1} ; \mathrm{S}_{2q+2}\right)$. **0,5 pt**
4. Déduire qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux. **0,75 pt**

PROBLEME **10,5 Points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : **5 Points**

Soit h la fonction définie sur [-2 ; 2] par : $\mathrm{h}(x) = -x^3 + 3x + 1$.

1. a. Dresser le tableau des variations de h. **0,5 pt**

   b. Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une unique solution dans chacun des intervalles : [-2 ; -1], [-1 ; 1] et [1 ; 2]. **0,75 pt**

   c. Déterminer une valeur approché à 10^{-2} près de la solution appartenant à l'intervalle [-1 ; 1]. **0,5 pt**

2. Détermination de la valeur exacte de ces trois solutions sous la forme $2\sin a$

   a. Montrer en utilisant les nombres complexes que pour tout réel a, $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$. **0,75 pt**

   b. Montrer que la fonction t définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\mathrm{t}(a) = 2\sin a$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle I que l'on précisera. **0,75 pt**

   c. En déduire, en posant $x = 2\sin a$ que l'équation $\mathrm{h}(x) = 0$ où $x \in [-2;2]$ est équivalente à $1 + 2\sin 3a = 0$ où $a \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. **0,75 pt**

   d. Exprimer les trois solutions de l'équation $\mathrm{h}(x) = 0$ sous la forme $2\sin a$ où $a \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.**1 pt**

Partie B : **5,5 points**

Soit N un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. a. Montrer que a et b n'ont pas la même parité. **0,5 pt**

   b. Quelle est la parité de $a - b$ et de $a + b$? **0,5 pt**

2. On admet que 250 507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ vérifiant la relation (E) : $\quad a^2 - 250\,507 = b^2$.

   a. i. Soit n un entier naturel. Donner les restes possibles de n modulo 9 ; puis ceux de n^2 modulo 9. **0,5 pt**

   On rappelle que le reste d'un entier n modulo un entier naturel non nul b est le reste de la division euclidienne de n par b.

   ii. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles module 9 de a^2. **0,5 pt**

   iii. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8. **0,5 pt**

   b. Justifier que si le couple $(a\,;\,b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geqslant 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\,;\,b)$. **0,5 pt**

   c. On suppose que le couple $(a\,;\,b)$ vérifie la relation (E). **0,5 pt**

   i. Montrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9. **0,5 pt**

   ii. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k\,;\,b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant. **0,5 pt**

3. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs. **0,5 pt**

4. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ? Cette écriture est-elle unique ? **0,5 pt**