

Épreuve de Mathématiques

Enseignants : L. Nono & M. Negno

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1

7 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- Soit $j \in \mathbb{C}$ le nombre complexe défini par $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
 - Vérifier que $j^2 = \bar{j}$; $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$. [0,25×3]
 - Soit $E(1)$, $F(j)$ et $G(j^2)$. Donner une interprétation vectorielle de la relation $1 + j + j^2 = 0$. [0,25pt]
 - On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$. Démontrer que ABC est un triangle rectangle si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^1 + cj = 0$. [1pt]
- Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4$. [1pt]
 - Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S qui transforme A en O et B en C avec $A(i)$, $B(\sqrt{3})$ et $C(-4i)$. [0,75pt]
Déterminer les éléments caractéristiques de S .
 - Déterminer l'ensemble défini en 2.a. en utilisant les résultats établis en 2.b.. [0,5pt]
- Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$.
 - Démontrer que a et b sont deux nombres complexes conjugués. [0,5pt]
 - Démontrer que la partie imaginaire de a est positive. [0,5pt]
 - Calculer $a + b$ et ab et en déduire les valeurs exactes de a et b . [1pt]

EXERCICE 2

1 point

Trouver les entiers naturels x tels que le reste de la division euclidienne de 11111 (resp 2112) par x soit égal à 100 (resp 110). [1pt]

PROBLEME

12 points

Le problème comporte trois parties indépendantes A , B et C .

Partie A (2,5 points)

Soit l'application $f : x \mapsto \cos^2 x$ de $[0; \frac{\pi}{2}]$ dans $[0; 1]$.

- Montrer que f est bijective. [1pt]
- Déterminer l'ensemble E sur lequel f^{-1} est dérivable. [0,5pt]
- Calculer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in E$. [1pt]

Partie B (4 points)

- Résoudre dans $\mathbb{R}$
 - $(E1) : \ln(2x + 8) - \ln(3x + 2) = \ln(x + 1)$ [0,5pt]
 - $(E2) : 6 - 5 \ln^2 x = 13 \ln x$. [0,5pt]
- Résoudre dans $\mathbb{R}$
 - $(I1) : \frac{-2 + \ln x}{1 + \ln x} \geq 0$. [0,5pt]
 - $(I2) : \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} > \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$. [0,5pt]

3. On donne les fonctions f , g et h définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement par

$$f(x) = \cos^4 x, \quad g(x) = \cos^3 x \sin^2 x, \quad h(x) = \frac{2}{(1+3x)^4}.$$

- a. Linéariser $f(x)$ et en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$. [1pt]
- b. Déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$. [0,5pt]
- c. Déterminer les primitives de h sur $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$. [0,5pt]

Partie C (5,5 points)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$ et (C) sa courbe représentative.

- 1. Exprimer $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue. [1pt]
- 2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition. [1pt]
- 3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. [1,5pt]
- 4. Démontrer que (C) admet deux asymptotes obliques dont on donnera les équations. [1pt]
- 5. Tracer (C) et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie dont on précisera une équation. [1pt]