Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun
www.easy-maths.org

Examen : Baccalauréat 2016
Série : C-E
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4h Coefficient : 5(C)/ 4(E)

L'épreuve comporte deux exercices et un problème, le tout sur deux pages.

Exercice 1 **4,5 points**

Une urne contient 5 jetons portant les réels : $-\sqrt{2}; -1; 0; 1$ et $\sqrt{2}$. On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne. On appelle x le numéro du premier jeton et y celui du deuxième jeton et on construit le nombre complexe $z = x + iy$.

1. Combien de nombres complexes peut-on ainsi construire ? [1 pt]
2. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a. Un nombre complexe de module $\sqrt{2}$? [1 pt]
   b. Un nombre complexe dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$? [1 pt]
3. On effectue trois fois de suite le tirage successif et avec remise de 2 jetons de l'urne et on désigne par X la variable aléatoire qui, à l'issue de ces trois tirages associe le nombre complexe de module $\sqrt{2}$. Déterminer la loi de probabilité de X. [1,5 pt]

Exercice 2 **5,5 points**

On considère dans un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, les surfaces (S) et (S') d'équations respectives $z = (x-y)^2$ et $z = xy$. On prendra 1 cm comme unité.

I. 1. Déterminer le vecteur $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} \wedge (2\vec{k})$. [0,25 pt]

2. On note (I_2) l'intersection de (S') avec le plan (P_1) d'équation $z = 0$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (I_2). [0,5 pt]

3. On note (I_3) l'intersection de (S) et de la surface (S'') d'équation $z = -2xy + 4 + 2y^2$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques du projeté orthogonal de (I_3) sur le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. [0,75 pt]

II. (Série C uniquement)

On note (I_4) l'intersection de (S) et de la surface (S'). Dans cette partie, on veut démontrer que le seul point de (I_4) dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point $O(0;0;0)$. On suppose qu'il existe un point M appartenant à (I_4) et dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

1. Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O. [0,5 pt]
2. On suppose désormais que l'entier x n'est pas nul.
   a. Montrer que les entiers x et y vérifient $x^2 - 3xy + y^2 = 0$.
   En déduire qu'il existe alors deux entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0$. [1,25 pt]
   b. Montrer que x' divise y'^2, puis que x' divise y'. [1 pt]
   c. Etablir que $x = 0$ et conclure. [1,25 pt]

III. (Série E uniquement)

$ABCO$ est un tétraèdre régulier d'arête égale à 2. L'arête $[OB]$ est portée par l'axe des ordonnées. C est un point du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'abscisse égale à $\sqrt{3}$.

1. a. Faire un schéma. [1 pt]

b. Montrer que les coordonnées des points A, B et C dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ sont respectivement $(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1; \frac{2\sqrt{6}}{3})$; $(0; 2; 0)$ et $(\sqrt{3}; 1; 0)$. [2 pts]

2. En déduire le volume du tétraèdre $ABCO$. [1 pt]

Problème **10 points**

Le problème comporte deux parties A et B.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'ensemble (E) des points $M(x; y)$ tels que $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$.
On va déterminer toutes les isométries du plan qui laissent (E) globalement invariant.

Partie A : **4,75 points**
Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = (1 - \sqrt{|x|})^2$ pour tout x appartenant à $[-1; 1]$. On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra 3 cm comme unité sur les axes.

1. **a.** Déterminer la parité de f. [0,25 pt]

b. Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire ? [0,25 pt]

2. Soit g la restriction de f à $[0; 1]$ et t la fonction définie sur $[0, 1]$ par $t(x) = g(x^2)$.

a. Vérifier que $g(x) = (1 - \sqrt{|x|})^2$ pour tout $x \in [0; 1]$. [0,25 pt]

b. Etudier la dérivabilité de g à droite en 0. Que peut-on conclure pour la courbe (C) de f. [0,5 pt]

c. Montrer que pour tout $x \in]0; 1]$, $g'(x) = \dfrac{-1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. [0,25 pt]

d. Dresser le tableau de variation de g. [0,5 pt]

e. Montrer que t est solution de l'équation différentielle $y'' - 2 = 0$ sur $[0; 1]$. [0,25 pt]

3. **a.** Représenter ***soigneusement*** dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe (C) de la fonction f. [0,5 pt]

b. Déterminer l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses et la courbe (C) de f. [0,5 pt]

4. Soit h la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = -h(x)$. Déduire de (C) la courbe (C') de h dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. [0,5 pt]

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Vérifier que la suite (u_n) est bien définie. [0,5 pt]

b. Montrer que (u_n) n'est ni croissante ni décroissante. [0,5 pt]

Partie B : **5,25 points**
On note $(\mathcal{I})$ l'ensemble des isométries du plan qui laissent (E) globalement invariant.

1. Montrer que pour tout point $M(x; y)$ appartenant à (E), on a : $-1 \leq x \leq 1$. [0,5 pt]

2. Montrer que (E) est la réunion des courbes (C) et (C'). [0,5 pt]

3. On considère dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$les points $I(1; 0)$; $J(0; 1)$; $K(-1; 0)$ et $L(0; -1)$.

a. Déterminer l'ensemble des couples $(A; B)$ de points de (E) tels que $d(A; B) = 2$. [0,25 pt]

b. Soit S une isométrie du plan laissant (E) globalement invariant.
Montrer que : $S(O) = O$. [0,5 pt]

c. En déduire toutes les natures possibles de l'isométrie S [0,5 pt]

4. Soit r un déplacement laissant globalement invariant (E).

a. Vérifier que r est soit une rotation de centre O et d'angle non nul, soit l'application identique du plan. [0,5 pt]

b. En déduire par leurs éléments caractéristiques tous les déplacements laissant (E) globalement invariant. [1 pt]

5. Soit S_Δ une réflexion du plan d'axe Δ laissant (E) globalement invariant.

a. Vérifier que $O \in \Delta$. [0,25 pt]

b. En déduire par leurs éléments caractéristiques toutes les réflexions qui laissent (E) globalement invariant. [1 pt]

6. Ecrire alors en extension l'ensemble $(\mathcal{I})$. [0,25 pt]