Bassin pédagogique de Douala III$^{\text{ème}}$
Evaluation harmonisée de la 5$^{\text{eme}}$ séquence
www.easy-maths.org

Année scolaire 2015-2016
Classe T$^{\text{le}}$C
Durée : 4h
Coef : 5

Épreuve de Mathématiques

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 **4,25 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité sur les axes : 1 cm. (H) est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$.

1. **a.** Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera l'équation réduite. [0,75pt]
   b. Déterminer respectivement le centre, les axes, les sommets et les asymptotes de (H). [1pt]
2. Soit Ω le point de coordonnées $(-2; 1)$ et $\vec{e}_1 = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\vec{e}_2 = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ deux vecteurs du plan.
   a. Montrer que $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère du plan. [0,25pt]
   b. Montrer que l'équation cartésienne de (H) dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est $Y = \dfrac{1}{4X}$. [1pt]
   c. En déduire l'excentricité et les foyers de (H) dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. [0,75pt]
3. Représenter graphiquement (H) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

EXERCICE 2 **2,5 points**

L'espace orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A(1; 1; -\frac{3}{2})$, $B(0; 1; -1)$, $C(-4; -3; -2)$ et $D(1; 1; -1)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. [0,5pt]
   b. Ecrire une équation cartésienne du plan (ABC). [0,75pt]
2. Montrer que les points A, B, C et D definissent un tétraèdre $ABCD$. [0,5pt]
3. Calculer le volume de ce tétraèdre. [0,75pt]

EXERCICE 3 **2,75 points**

E est un espace vectoriel de dimension 3 muni de la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath}$; $f(\vec{\jmath}) = f(\vec{k}) = \dfrac{1}{2}(\vec{\jmath} + \vec{k})$. On note $Ker\ f$ le noyau de f et $Im\ f$ l'image de f.

1. Déterminer une base de $Ker\ f$. [0,5pt]
2. Déterminer une base de $Im\ f$. [0,5pt]
3. Démontrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une somme d'un vecteur de $Ker\ f$ et d'un vecteur de $Im\ f$. [0,75pt]
4. **a.** Vérifier que $f \circ f = f$. [0,5pt]
   b. Démontrer que $\vec{u} \in Im\ f \iff f(\vec{u}) = \vec{u}$. [0,5pt]

PROBLEME **10,5 points**

Le problème comporte trois parties **A**, **B** et **C** indépendantes.

Partie A (3 points)

Pour tout entier naturel n, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \sin x dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \cos x dx$.

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que $2I_n + nJ_n = 2$ et $nI_n - 2J_n = -2e^{-\frac{n\pi}{4}}$. [1,5pt]
2. Déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n pour tout entier naturel n. [0,75pt]
3. Les suites (I_n) et (J_n) sont-elles convergentes ? [0,75pt]

Partie B (5,25 points)

La fonction f est définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right) & \text{si}\ ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan : unité 2 cm.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. [0,75pt]
2. La fonction g est définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x$. (Γ) est la courbe de g dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a. Etudier les variations de g, dresser son tableau de variation et tracer (Γ). [1,25pt]
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - g(x))$ puis donner une interprétation géométrique du résultat. [0,5pt]
   c. Etudier les positions relatives de (C) et (Γ). [0,5pt]
3. a. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis étudier les variations de f'. [0,75pt]
   b. Montrer que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f. [0,5pt]
   c. Tracer (C). [0,25pt]
4. λ est un réel strictement supérieur à 1. Calculer en cm^2 l'aire A_λ de la partie du plan limitée par (Γ), (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$. [0,75pt]

Partie C (2,25 points)

Soit α un nombre réel de l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation [0,75pt]

$$z^2\cos^2\alpha - 2x\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0.$$

   b. Déterminer le module et un argument des solutions. [0,75pt]
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : [0,75pt]

$$(1+\cos 2\alpha)y'' - (2\sin 2\alpha)y' + 2y = 0.$$