MINESEC
Lycée de Nkolnda–Nsimalen
Département de Mathématiques

Année scolaire : 2015-2016
Classe : T^{le} C **Durée : 4 heures**
Séquence 3 **Date : . . . Janvier 2016**
Coefficient : 05

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric TCHAPNGA**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I : Arithmétique **3,5 Points**

1. Un entier naturel N s'écrit $\overline{2202002}$ dans la base a $(a > 2)$.
   - **a.** Montrer que N est divisible par l'entier qui s'écrit $\overline{1111}$ en base a. **0,5 pt**
   - **b.** Écrire le quotient de cette division dans la base a. **0,25 pt**
2. Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a; b)$ telles que : P.G.C.D (a ; b) = 42 et P.P.C.M (a ; b) = 1 680. **0,75 pt**
3. Soit b un entier relatif. On donne $p = 3b + 2$ et $q = 12b + 4$.
   - **a.** Trouver une relation entre p et q indépendante de b puis en déduire les valeurs possibles de P.G.C.D $(p\,;\,q)$. **1 pt**
   - **b.** Pour quelles valeurs de b a-t-on : i) P.G.C.D $(p\,;\,q) = 4$? ii) P.G.C.D $(p\,;\,q) = 2$? **1 pt**

EXERCICE II : Fonctions numériques **3,5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\ I,\ J)$.
Soit f la fonction définie sur $]-3;1[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \tan\left[\dfrac{\pi}{4}(x+1)\right]$.

1. - **a.** Dresser le tableau de variation de la fonction f. **0,5 pt**
   - **b.** Tracer la courbe représentative (C_f) de f. **0,5 pt**
2. - **a.** Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1}. **0,25 pt**
   - **b.** Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left[f^{-1}(x)\right]' = \dfrac{4}{\pi(1+x^2)}$. **0,75 pt**
3. On considère la fonction g, définie par : $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.
   - **a.** Étudier la dérivabilité de g sur son ensemble de définition puis calculer sa dérivée. **0,75 pt**
   - **b.** En déduire la formule explicite de g sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. **0,75 pt**

EXERCICE III ; Suites numériques - Arithmétique **4 points**

On considère la suite (U_n) d'entiers naturels définie par $U_0 = 14$ et $\forall n \in,\ U_{n+1} = 5U_n - 6$.

1. Calculer $U_1,\ U_2,\ U_3$ et U_4.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de U_n ? **1 pt**
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+2} \equiv U_n \pmod{4}$. **0,5 pt**
   En déduire que pour tout entier naturel k, $U_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$ et $U_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$. **0,5 pt**
3. - **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2U_n = 5^{n+2} + 3$. **0,5 pt**
   - **b.** En déduire que, pour tout entier naturel n, $2U_n \equiv 28 \pmod{100}$. **0,5 pt**

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de U_n suivant les valeurs de n. **0,5 pt**

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (U_n) est constant. Préciser sa valeur. **0,5 pt**

PROBLEME **9 Points**

Le problème comporte trois parties. Les parties B et C sont dépendantes.

Partie A : Isométrie du plan **2,5 Points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).
On considère l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point $M(x; y)$ asocie le point $M'(x'; y')$ telles que : $5x' = -3x - 4y + 3$ et $5y' = -4x + 3y + 14$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. **0,5pt**
2. Montrer que f est une isométrie du plan. **0,5pt**
3. Montrer que f∘f est une translation puis en déduire la nature de f. **1 pt**
4. Déterminer les éléments caractéristiques de f. **0,5pt**

Partie B : Suites - Fonction logarithme - Intégrales **3,5 points**

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^\star$, on considère l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$.

1. **a.** Soit x un element de $]1\,;\,\mathrm{e}[$.
   Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$. **0,25 pt**

   b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante. **0,25 pt**

2. **a.** Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties. **0,25 pt**

   b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$. **0,5 pt**

   c. En déduire I_2 et I_3. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e. **0,5 pt**

3. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$. **0,25 pt**

   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leq \mathrm{e}$. **0,5 pt**

   c. En déduire la limite de I_n. **0,25 pt**

   d. Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n. **0,75 pt**

Partie C : Géométrie de l'espace - Application affine de l'espace **3 points**

On considère dans le cube ABCDGHEF, les points I et J tels que $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$. a étant l'arête du cube, on rapporte l'espace au repère orthonormal direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que : $\overrightarrow{AG} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = a\vec{j}$ et $\overrightarrow{AB} = a\vec{k}$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{GJ}$ sont orthogonaux. **0,5 pt**
2. Montrer que les plans (AIB) et (GJH) sont perpendiculaires. **0,5 pt**
3. Déterminer les coordonnées du point K intersection des droites (AI) et (GJ) ainsi qu'une représentation paramétrique de la droite (D) passant par K et perpendiculaire au plan (AGF). **1pt**
4. Soient S_1 et S_2 les réflexions par rapport aux plans (AIB) et (GJH) respectivement. Donner la nature et l'ensemble des points invariants de $S_1 \circ S_2$. **1 pt**