Chapitre 3

Nombres complexes

3.1 Définition et interpretation géométrique des nombres complexes

Problème

Au debut du 16^{eme} siècle, le mathématicien Scipione Dal Ferro, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3^{eme} degré $x^3 + px = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}.$$

A la fin du même siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$. Il obtient littéralement

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}.$$

Cette écriture n'a à priori, pas de sens puisqu'on ne sait pas ce que représente le symbole noté $\sqrt{-1}$. Mais Bombelli va plus loin. En 1572, il remarque, en utilisant les règles usuelles de calcul que :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}, \quad \text{et} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Si bien qu'il obtient finalement : $x = 2 + 11\sqrt{-1} + 2 - 11\sqrt{-1} = 4$. Or $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$.

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes.

Introduction

L'équation $x + 7 = 6$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle en a une dans un ensemble plus grand : $\mathbb{Z}$ qui est $x = -1$. De même, l'équation $3x = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, alors que dans un ensemble plus grand, $\mathbb{Q}$ par example, il y en a une : $x = \frac{1}{3}$. Et puis, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$; il faut chercher dans l'ensemble des nombres réels pour en trouver.

Bref, quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) consiste à chercher dans un ensemble plus grand. En l'état actuel de nos connaissances, l'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est $\mathbb{R}$. Pourtant, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$...

On va donc, dans ce chapitre, « construire ? »ou plutôt imaginer un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel, l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède des solutions. On va appeller cet ensemble $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes. Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté i (comme imaginaire). Le nombre $i = \sqrt{-1}$ et donc est tel que $i^2 = -1$! L'équation $x^2 + 1 = 0$ possède alors deux solutions : $x = i$ et $x = -i$.

A la fin de ce cours, j'attends de l'élève d' :

- Etre à l'aise dans le calcul aussi bien sous forme algébrique que trigonométrique, qu'exponentielle : addition, multiplication, puissance, racines n-ième, racines d'une équation du second degré.
- Etre capable d'interpréter géométriquement les calculs sur les nombres complexes et de traduire certaines propriétés géométriques par des équations de nombres complexes.
- Etre capable d'utiliser les nombres complexes pour la résolution de problèmes réels : linéarisation de $\cos^n x$ de $\sin^n x$,calcul des sommes trigonométriques du genre

3.1.1 Définition et conséquences immédiates

Définition 3.1. *On pose i le nombre tel que $i^2 = -1$.*

1. *On appelle nombre complexe tout nombre z de la forme $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels.*
2. *Le réel a est appelé la partie réelle de z et est noté $Re(z)$.*
3. *Le réel b est appelé partie imaginaire de z et est noté $Im(z)$.*
4. *Si $a = 0$, on dit que z est un imaginaire pur.*
5. *On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaire pur.*

Remarque 3.1. $i^3 = i \times i^2 = -i$; $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

Pourquoi la vie des hommes est-elle complexe ?
Parce qu'elle a une partie réelle et une partie imaginaire.

Proposition 3.1. *Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.*

Proposition 3.2 (Indentités remarquables)**.** *Soit z et z' deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$,*

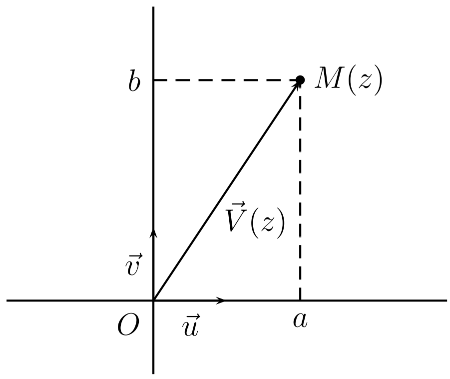
1. $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$;
2. $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$;
3. $(z - z')(z + z') = z^2 - z'^2$.
4. $(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k z'^{n-k}$.
5. $a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Interpretation géométrique

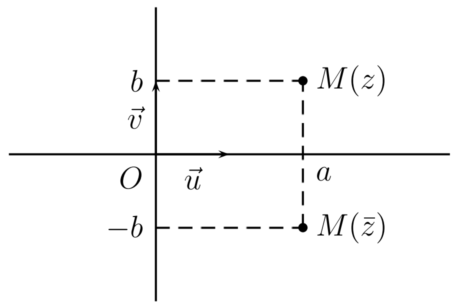
Le plan (P) orienté est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \to & (P) \\ & z = a + ib & \mapsto & M\binom{x}{y} \end{array}$$

M est appelé point image de z et noté $M(z)$. z est appelé l'affixe de M. Si on pose $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$, z est aussi l'affixe du vecteur $\vec{V}$ et on note encore $\vec{V}(z)$.



Définition 3.2. *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$ le nombre définit par $\bar{z} = a - ib$.*



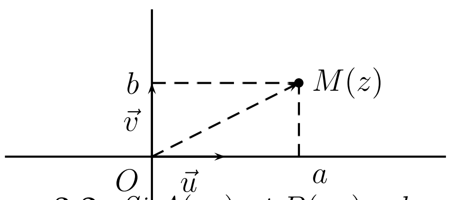
Proposition 3.3. *Soit z et $z' \in \mathbb{C}$.*

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}$, $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}$.
3. $(z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z)$ et $(z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z)$.

Démonstration. Exercice. □

Définition 3.3 (Module)**.** *Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$, on appelle module de z le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.*

Exemple 3.1. $z = \sqrt{2} - i$, $|z| = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$.



Géométriquement, si $M(z)$ est la point d'affixe z, alors le module de z représente la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Remarque 3.2. *Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. Ainsi $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$.*

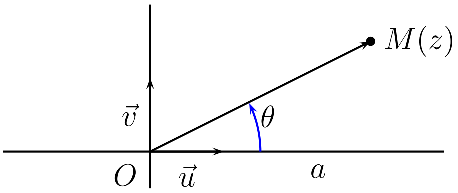
Proposition 3.4.
- $|z| \geq 0$,
- $|\bar{z}| = |z|$,
- $|zz'| = |z||z'|$, *et* $|z^n| = |z|^n$.

3.2 Nombres complexes et trigonométrie

3.2.1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Le plan (P) orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définition 3.4. .



Soit $z = a + ib$, $z \in \mathbb{C}^*$ d'image $M(a, b)$ dans le plan (P). On appelle argument de z l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$.

Remarque 3.3. *On appelle aussi argument de z toute mesure en radian θ de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$ et on note $arg z \equiv \theta[2\pi]$. Les réels strictement positifs ont pour argument 0 et les réels strictement négatifs ont pour argument π.*

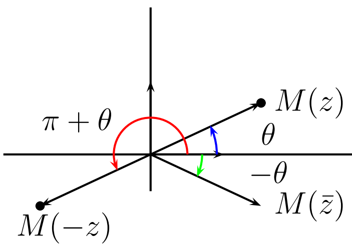
Définition 3.5 (Forme trigonométrique)**.** *Soit $z = a + ib$, $z \in \mathbb{C}^*$.*

1. *Son argument θ est défini à 2π près par les formules suivantes :*
$$\cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r}, \quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
2. *$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la forme trigonométrique de z. On note aussi $z = [r, \theta]$ (forme polaire).*

Exemple 3.2. *Donner la forme trigonométrique de 2, $-2i$, $1 + i$, $\sqrt{2} - i$.*
- $|2| = 2$ *et* $arg(2) = 0$ *donc* $2 = [2, 0]$.
- $|-2i| = 2$ *et* $arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$ *donc* $-2i = [2; -\frac{\pi}{2}]$.
- $|1 + i| = \sqrt{2}$ *et* $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *donc* $\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$, *ainsi* $1 + i = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]$.
- $|\sqrt{2} - i| = \sqrt{3}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ *donc* $\theta = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$, *ainsi* $\sqrt{2} - i = [\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}]$.

Proposition 3.5. .

.



Soit $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$, alors :
1. $(z = z') \Leftrightarrow (r = r'$ *et* $\theta' \equiv \theta[2\pi])$
2. $\bar{z} = [r, -\theta]$,
3. $-r = [r, \theta + \pi]$.

.

On a les formules suivantes qui sont immédiates.

Proposition 3.6. *Soit $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors :*
1. $zz' = [rr', \theta + \theta']$.
2. $z^n = [r^n; n\theta]$. *(Formule de Moivre)*

Remarque 3.4. *On énonce aussi la formule de Moivre sous la forme $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.*

Exemple 3.3.
1. *Simplifier l'écriture du nombre complexe $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1983}$.*
2. *Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = z_1 z_2$. En déduire les lignes trigonométriques de $\frac{7\pi}{12}$.*

Solution

1. $|z| = 1$, $arg(z) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc $z = [1; \frac{\pi}{3}]$, On a donc

$$z^{1983} = [1; \frac{1983\pi}{3}] = [1; 661\pi] = [1; (660+1)\pi] = [1; \pi + 2k\pi] = [1; \pi] = -1.$$

2. $z_1 = [\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}]$, $z_2 = [2; \frac{\pi}{3}]$, $z_3 = z_1 z_2 = [2\sqrt{2}; \frac{7\pi}{12}] = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$. On en déduit

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}; \quad \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Proposition 3.7. *Soit $z = [r; \theta]$ et $z' = [r'; \theta']$, alors :*

$$\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}; -\theta\right]; \quad \frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right].$$

Définition 3.6 (Notation exponetielle)**.** *Soit $z = [r; \theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. On note $z = re^{i\theta}$.*

Proposition 3.8. *En utilisant la notation exponetielle, on obtient sans peine les relations :*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Dans les classes antérieures, on a établit que

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

On a vu en exercice (classe de Première S) que

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta, \qquad \sin 3\theta = 3\cos^2\sin\theta - \sin^3\theta.$$

Les preuves étaient alors longues et ennuyeuses. La formule de Moivre facilite les démonstrations, mais comment ?

On rappelle la forlule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

★ Pour $n = 2$, on a $\cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$. Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

★ Pour $n = 3$, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$. Mais par la formule du binôme de Newton, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$. Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta, \qquad \sin 3\theta = 3\cos^2\sin\theta - \sin^3\theta.$$

Il sera souvent utile de passer d'une écriture de la forme $\cos^n\theta$ à une écriture de la forme $f(\cos p\theta)$. Par exemple, $\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$. Ce genre d'écriture étant utile pour la résolution des équations trigonométriques et plus tard, pour le calcul des primitives. La question est comment est ce qu'on le fait. La réponse se trouve dans la formule d'Euler. Voici quelques exemples.

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2\\
&= \left(\frac{e^{2i\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-2i\theta}}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}+1\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\cos 2\theta+1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3\\
&= \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3\\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta}-3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}-3(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right)\\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i}-3\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\\
&= -\frac{1}{4}\left(\sin 3\theta-3\sin\theta\right).
\end{aligned}$$

Cette opération s'appelle la linéarisation.

Exposé 3. *Linéariser* $\cos^n x$ *et* $\sin^n x$ *pour* $n \geq 4$.

On a les transformations classiques suivantes.

Proposition 3.9 (Sommes en produit). *Soit a et b deux nombres réels.*

- $\cos a+\cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$;
- $\sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$;
- $\cos a-\cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$;
- $\sin a-\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$.

Démonstration. On écrit

$$(\cos a+\cos b)+i(\sin a+\sin b) = e^{ia}+e^{ib} = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left[e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{b-a}{2}\right)}\right] = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\times 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

et ensuite :

$$(\cos a-\cos b)+i(\sin a-\sin b) = e^{ia}-e^{ib} = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left[e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{b-a}{2}\right)}\right] = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\times 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

et on déduit le résultat. □

Proposition 3.10 (Produit en somme). *Soit a et b deux réels. On a :*

- $\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

Exposé 4. 1. *Déterminer un polynôme P tel que $\cos 5x = P(\cos x)$ pour tout réel x. Calculer $\cos \frac{\pi}{10}$.*

2. *Soit n un entier naturel non nul, $\theta \in]0;\pi[$. On considère :*

$$\begin{aligned} S_n &= \cos\theta\cos\theta + \cos^2\theta\cos 2\theta + \cdots + \cos^p\cos p\theta + \cdots + \cos^n\theta\cos n\theta \\ S'_n &= \cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin 2\theta + \cdots + \cos^p\sin p\theta + \cdots + \cos^n\theta\sin n\theta \end{aligned}$$

On pose $T_n = S_n + iS'_n$.

(a) *Montrer que T_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe dont on déterminera le premier terme et la raison.*

(b) *En déduire la valeur de T_n puis de S_n en fonction de n.*

3.3 Equations dans $\mathbb{C}$.

3.3.1 Racine $n-$ième d'un nombre complexe.

Etant donné Z un nombre complexe, et $n \in \mathbb{N}^*$, il s'agit de trouver tous les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = Z$.

Par exemple, si $Z = 0$, alors $z^n = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Supposons Z non nul, et $n = 2$, cherchons alors z tel que $z^2 = Z$. L'idée est d'écrire Z sous la forme $Z = [R;\theta]$ et $z = [\rho, \alpha]$. On a alors

$$\begin{aligned} Z = z^2 &\Leftrightarrow [\rho^2; 2\alpha] = [R;\theta] \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = R \\ 2\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{R} \\ \alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Les valeurs paires de k donnent une solution d'argument $\frac{\theta}{2}$ et les valeurs impaires de k donnent une solution d'argument $\frac{\theta}{2} + \pi$. Il siffit donc de donner les valeurs 0 et 1 à k, les solutions sont alors

$$z_0 = \left[\sqrt{R}; \frac{\theta}{2}\right], \qquad z_1 = \left[\sqrt{R}; \frac{\theta}{2} + \pi\right]$$

Proposition 3.11. *Soit Z un nombre complexe non nul. L'équation $z^2 = Z$ admet deux solutions complexes opposés.*

Exemple 3.4. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \sqrt{2}(1+i)$.*

On vérifie que $Z = \sqrt{2}(1+i) = [2; \frac{\pi}{4}]$. En appliquant ce qui précède, on obtient :

$$z_0 = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{8}\right], \qquad z_1 = \left[\sqrt{2}; \frac{9\pi}{8}\right].$$

Je conseille fortement au lecteur de recommencer la preuve chaque fois qu'il aura à résoudre une équation, jusqu'à avoir la parfaite maitrise du processus.

Remarque 3.5. *Cette méthode est particulièrement commode lorsqu'on peut déterminer une valeur exacte de l'argument θ de Z. Quand on ne peut pas le faire aisément, on ne baisse pas les bras, on procède comme suit.*
On pose $Z = a + ib$ et $z = x + iy$, alors on a $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$. L'équation $z^2 = Z$ conduit donc à $x^2 - y^2 = a$ et $2xy = b$. D'autre part, on sait que $|Z| = |z|^2$ donc $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. On en déduit le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \Rightarrow xyb > 0 \end{cases}$ *dont la résolution conduit a*

$$z_0 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \quad z_1 = -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Exemple 3.5. *Déterminer z tel que $z^2 = 46 - 14i\sqrt{3}$.*

On pose $z = x + iy$, $z^2 = 46 - 14i\sqrt{3}$, c'est-à-dire $(x^2 - y^2) + 2ixy = 46 - 14i\sqrt{3}$. Ainsi $x^2 - y^2 = 46$ et $xy = -7\sqrt{3}$. Comme $xyb > 0$ et $b < 0$, on doit avoir $xy < 0$. D'autre part, $x^2 + y^2 = 52$ Le système conduit à $x = 7$ ou $x = -7$ et $y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$. On a donc $z_0 = 7 - i\sqrt{3}$ et $z_1 = -7 + i\sqrt{3}$.

Exercice 3.1. *Résoudre de deux façons différentes l'équation $z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ et en déduire $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.*

Proposition 3.12. *Soit Z un nombre complexe non nul de module R et d'argument θ et $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$. Les racines de l'équation $z^n = Z$ sont les nombres complexes $z_k = \left[\sqrt[n]{R}; \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Remarque 3.6. *Cette équation a exactement n solutions et il suffit de donner n valeurs consécutives à l'entier k pour obtenir toutes ces solutions. En général, on prend pour plus d'aisance,*
$k \in \{0; 1; \ldots, n-1\}$.
Les n racines de l'équation $z^n = Z$ ont pour image les sommets d'un polygone régulier à n côté inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|Z|}$.

3.3.2 Equations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Il s'agit des équations du second degré dans $\mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

Proposition 3.13. *L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions.*

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

où δ est l'une quelconque des racines carrées de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque 3.7.
- *Si $\Delta = 0$, les deux solutions sont confondues et égales à $-\frac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta \neq 0$, les deux solutions sont distinctes.*

Exemple 3.6. *Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 - (3 + i)z + 2(1 + i) = 0$.*
$\Delta = (3 + i)^2 - 8(1 + i) = -2i = \left[2; -\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \delta = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right] = 1 - i$. *Les solutions $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2$.*

3.4 Géométrie euclidienne plane des nombres complexes

3.4.1 Configuration géométrique

(P) est le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C sont des points de (P) d'affixes respectives z_A, z_B, z_C.

$OA = |z_A|$, $AB = |z_B - z_A|$, $arg z_A = (\vec{u}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = arg z_B - arg z_A$.
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

Théorème 3.1. *A, B, C, D sont quatre points du plan (P) deux-à-deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C alors.*

- $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *colinéaire* $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- *$ABCD$ est un parallélogramme* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$.
- *ABC est un triangle isocèle en A* $\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A|$

Démonstration. Découle des remarques ci-dessus. □

Théorème 3.2. *Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de n points pondérés d'affixes respectives z_{A_i} de masse $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Le barycentre de ce système G a pour affixe $z_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_{A_i}$.*

3.4.2 Lieux géométriques de bases.

★ Soit Ω un point du plan (P) d'affixe ω et r un réel strictement positif. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - \omega| = r$ est le cercle de centre Ω et de rayon r. En particulier, $|z| = r$ représente le cercle de centre O et de rayon r.

★ Si α est un nombre réel, le lieu des points M d'affixe z tels que $arg(z - \omega) \equiv \alpha[\pi]$ est une droite passant par Ω dirigée par le vecteur $\vec{e}$ tel que $(\vec{u}, \vec{e}) = \alpha$.

En effet, $arg(z - \omega) \equiv \alpha[\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \alpha[\pi] = (\vec{u}, \vec{e}) \Leftrightarrow M \in D(\Omega, \vec{e})$.

3.4.3 Traduction complexe de quelque transformations du plan.

★ Cas de la translation

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}(\beta)$. Un point $M'(z')$ est image d'un point $M(z)$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, ce qui est équivalent à dire que $z' - z = \beta$ d'où $z' = z + \beta$. L'écriture complexe d'une translation t est :

$$t : z \mapsto z + \beta.$$

★ Cas de l'homothétie

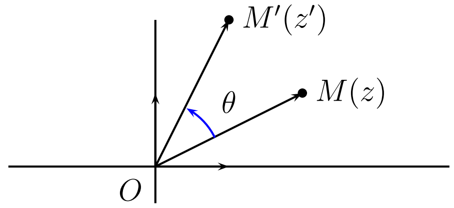
Soit h l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \neq 0$. $M'(z')$ est image d'un point $M(z)$ par h si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$, ce qui est équivalent à dire que $z' - \omega = k(z - \omega)$. L'écriture complexe d'une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k est

$$h : z \mapsto kz + (1 - k)\omega.$$

Théorème 3.3. *L'application $z \mapsto kz + \beta$ est :*

1. *une translation de vecteur d'affixe β si $k = 1$*
2. *une homothétie de rapport k et de centre $\frac{k}{1-\beta}$ si $k \neq 1$ et $k \neq 0$*

★ Cas de la rotation



Soit r une rotation de centre O et d'angle θ et $M'(z') = r(M(z))$. Alors $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta + 2k\pi$. Cela est équivalent à dire que $|z'| = |z|$ et $arg\frac{z'}{z} = \theta[2\pi]$. On en déduit que $\frac{z'}{z} = e^{i\theta}$ soit $z' = e^{i\theta}z$. La rotation r a pour représentation complexe $z \mapsto e^{i\theta}z$.

.

On montre de façon générale que la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ a pour remrésentation complexe

$$h : z \mapsto e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega.$$

Théorème 3.4. *Soit α un nombre complexe de module 1, l'application $z \mapsto \alpha z + \beta$ représente :*

1. *$\alpha = 1$, une translation de vecteur d'affixe β.*
2. *$\alpha \neq 1$, une rotation d'angle $\theta = arg\alpha$ et dont l'affixe du centre vérifie $\omega = \frac{\beta}{1-\alpha}$.*

★ Cas des similitudes

Soit $s = r \circ h = h \circ r$ où r est la rotation de centre Ω et d'angle θ et h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k > 0$. On sait que

$$h(z) = kz + (1 - k)\omega, \quad r(z) = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega.$$

On en déduit que

$$s(z) = kze^{i\theta} + (1 - ke^{i\theta})\omega.$$

Théorème 3.5. *Soit α et β deux nombres complexes avec $\alpha \neq 0$, l'application $z \mapsto \alpha z + \beta$ représente :*
- *pour $\alpha = 1$, la translation de vecteur β,*
- *pour $\alpha \neq 1$, la similitude plane directe de rapport $k = |\alpha|$, d'angle $\theta = arg\alpha$ et de centre d'affixe $\omega = \frac{\beta}{1-\omega}$.*

Remarque 3.8.
- *Une rotation d'angle θ est une similitude de rapport 1 et d'angle θ.*
- *Une homothétie $h(\Omega, k)$ est une similitude de $S(\Omega, 0, k)$.*
- *Les similitudes de rapport k multiplient les distances par k et les aires par k^2.*
- *Soit $S_1 = S(\Omega_1, k_1, \theta_1)$, $S_2 = S(\Omega_2, k_2, \theta_2)$, alors $S_1 \circ S_2 = S(\Omega, k_1k_2, \theta_1 + \theta_2)$.*
- *Si $S_1 = S(\Omega_1, k_1, \theta_1)$, alors $S_1^{-1} = S(\Omega_1, \frac{1}{k_1}, \theta_1)$.*

Exercice 3.2. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la similitude directe $S(\Omega(1,1), 2, \frac{\pi}{2})$. Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ son image par S.*

1. *Exprimer x' et y' en fonction de x et y.*
2. *Exprimer x et y en fonction de x' et y'.*
3. *Soit (D) la droite d'équation $2x + 4y - 1$. Déterminer $S((D))$.*
4. *Soit (Γ) la parabole d'équation $y = x^2 + x + 1$. Déterminer $S(\Gamma)$.*
5. *Soit (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 - x - \sqrt{3}y = 0$. Déterminer $S((C))$.*

Exercice 3.3. *Soit $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan complèxe. On considère la transformation :*

$$f : M(z) \mapsto M'(z')/, \; z' = (1 + i\tan\alpha)z + \tan\alpha.$$

1. *Montrer que* f *est une similitude directe de* (P) *dont on précisera les caractéristiques.*
2. *Quel le lieu* (Γ) *décrit par le point* M' *lorsque* M *décrit le cercle* $C(0, r = 2)$.
3. *Quel est l'ensemble des points d'intersection de* (Γ) *et la droite* $(D) : x = \tan\alpha$ *lorsque* α *varie dans* $]0, \frac{\pi}{2}[$.