Chapitre 6

Fonction logarithme népérien

On a vu que pour $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, les primtives de $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + k$. Une question naturelle se pose, puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]O; +\infty[$, elle admet bien des primitives sur cet intervalle. Quelles sont les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$? La formule précédente ne peut être appliquée car $n = 1$ et on ne peut écrire $\frac{1}{n-1}$. On va donc définir une nouvelle fonction qu'on appellera logarithme népérien (du mathématicien écossais John Neper), qu'on notera ln (ou *Log* suivant les ouvrages, nous adoptons dans ce qui suit la notation ln) qui sera la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 en 1.

6.1 Définition et premières conséquences.

Définition 6.1. *On appelle fonction logarithme népérien la primitive sur* $]0; +\infty[$ *de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *qui prend la valeur* 0 *en* 1. *On note* ln *cette fonction. On a donc* $\ln 1 = 0$ *et* $D_{\ln} =]0; +\infty[$.

La fonction ln a les propriétés suivantes.

Proposition 6.1. *La fonction* $x \mapsto \ln x$ *est définie, continue et dérivable sur* $]0; +\infty[$ *et* $\forall t \in]0; +\infty[$, *on a*

$$(\ln t)' = \frac{1}{t}.$$

Proposition 6.2. *La fonction* $x \mapsto \ln x$ *est strictement croissante sur* $]0; +\infty[$.

Corollaire 6.1. $\forall x \in]0; 1[$, $\ln x < 0$ *et* $\forall x \in]1; +\infty[$, $f(x) > 0$.

6.2 Relation fonctionnelle et conséquences

Théorème 6.1. *Pour tout couple* (a, b) *de réels strictement positifs, on a :*

$$\ln ab = \ln a + \ln b.$$

Démonstration. Soit $a \in]0; +\infty[$. On considère la fonction $\varphi_a :]0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ définie par $\forall x > 0$, $\varphi_a(x) = \ln ax$. φ_a est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions $x \mapsto ax$ et $x \mapsto \ln x$ et pour tout $x > 0$, on a

$$\varphi_a'(x) = a(\ln ax)' = a\frac{1}{ax} = \frac{1}{x}.$$

φ_a est donc une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, or sur $]0; +\infty[$, $x \mapsto \ln x$ est une primitive de la même fonction. Il existe donc un réel k tel que $\forall x \in]0; +\infty[$, on a $\varphi_a(x) = \ln x + k$. On a $\varphi_a(1) = \ln a = \ln 1 + k$ donc $k = \ln a$ et par conséquent $\varphi_a(x) = \ln x + \ln a$, $\forall x \in]0; +\infty[$. □

Corollaire 6.2. *1. Pour tout couple (a, b) de réels strictement positifs et pour tout entier naturel $n \neq 0$, on a :*
- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- $\ln a^n = n \ln a$.

2. Pour tout $n-$uplet $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de réels strictement positifs on a :

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i.$$

Démonstration. Soit $a > 0$, on a $1 = a \times \frac{1}{a}$ donc $\ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln 1 = 0$, on en déduit $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$. Ensuite, on écrit $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ donc $\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$. La troisième relation se montre par récurrence sur n. $\square$

Proposition 6.3. *$\forall r \in \mathbb{R}$ et $\forall a > 0$, on a $\ln a^r = r \ln a$.*

Exemple 6.1. *Simplifier l'expression $f(x) = \ln \sqrt{\frac{2x-3}{(x-1)^2}}$. La fonction f est définie si $\frac{2x-3}{(x-1)^2} > 0$ donc si $x > \frac{3}{2}$. Pour tout $x > \frac{3}{2}$, on a :*

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{2x-3}{(x-1)^2}} = \ln\left(\frac{2x-3}{(x-1)^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left[\ln(2x-3) - \ln(x-1)^2\right] = \frac{1}{2}\ln(2x-3) - \ln(x-1).$$

♠ **Attention.** On peut écrire $\ln(x-1)^2 = 2\ln(x-1)$ car pour $x > \frac{3}{2}$, $x - 1 > 0$.

6.3 Etude de la fonction ln

On admet les résultats suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Le tableau de variation de la fonction ln est le suivant :

x	0		1	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖		$+$	
$\ln(x)$	‖	$-\infty$	↗	$+\infty$

Le nombre e, base logarithme népérien

Définition 6.2. *La base d'un logarithme est le lieu où logarithme prend la valeur* 1.

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, elle réalise donc une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-\infty; +\infty[$. De façon précise, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in]0; +\infty[$ tel que $\ln x = y$. En particulier, il existe un unique réel noté e tel que $\ln e = 1$. On a $e \simeq 2.718$.

Etude des braches infinies

On sait que $\lim\limits_{0^+} \ln = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $(C_{\ln})$. D'autre part, on a $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$. Pour avoir des précisions sur le comportement de $(C_{\ln})$ au voisinage de $+\infty$, il faut calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Considérons pour cela la fonction $\phi(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

ϕ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0$, $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{x}$. ϕ' s'annule en 4 et on a $\phi'(x) < 0$ pour $x \in]0; 4[$; $\phi'(x) > 0$ pour $x \in]4; +\infty[$. ϕ admet donc un minimum en 4 et ce minimum est $\phi(4) = \sqrt{4} - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2)$. Or $1 = \ln e$ or $2 < e$ et ln strictement croissante donc $1 - \ln 2 > 0$ d'où $\phi(4) > 0$. On a le tableu de variation suivant de ϕ :

x	0		4		$+\infty$
ϕ'	||	$-$	0	$+$	
ϕ	|| $+\infty$	$\searrow$	$\phi(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

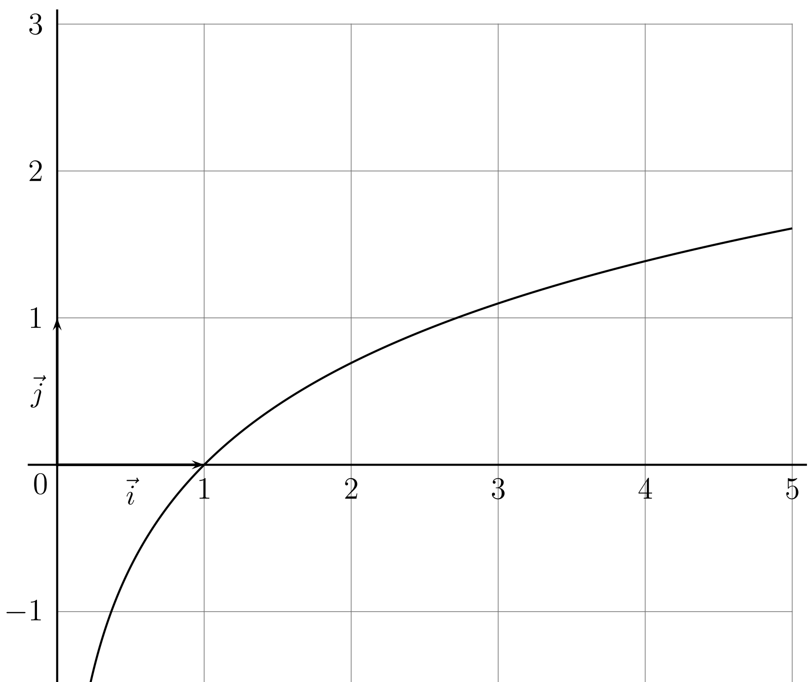
On a $\forall x \in]0; +\infty[$, $\phi(x) > 0$ d'où $\sqrt{x} - \ln x > 0$ d'où $\sqrt{x} > \ln x$. On peut donc écrire

$$\forall x > 0, \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. $(C_{\ln})$ admet une branche parabolique de direction (OI).

Voici des limites classiques à retenir

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0.$$



Proposition 6.4. *Pour tout $x > 0$, on a :*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Démonstration. Pour la première limite, on a

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 0}{x-1} = [\ln x]_{x=1} = 1/1 = 1.$$

Pour la seconde faire le changement de variable $X = x + 1$. □

6.4 Fonctions composées $\ln \circ u$.

u est une fonction strictement positive et dérivable. On a :

Proposition 6.5. $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.

Exemple 6.2. *Soit $f(x) = \ln(x^2 - 4)$. On a $u(x) = x^2 - 4$ qui est dérivable et strictement positive sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$. Pour tout $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2-4}$.*

Proposition 6.6. *Soit u une fonction dérivable, de signe constant et ne s'annulant pas sur un intervalle K de $\mathbb{R}$. Alors, les primitives de la fonction $\frac{u'}{u}$ sur K sont les fonctions de la forme $\ln \circ |u| + k$.*

Exemple 6.3. *Pour tout $x \in]-\pi/2; \pi/2[$, la fonction $x \mapsto \tan x$ admet pour primitives $x \mapsto -\ln(\cos x) + k$. On peut en effet écrire $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \cos x$.*

6.5 Equations et inéquations comportant $\ln$

Proposition 6.7. *Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ on a :*
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$;
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

Démonstration. Découle du fait que ln est une bijection croissante. □

6.5.1 Equation du type $\ln(u(x) = \ln v(x)$.

Les solution d'une telle équation lorsqu'elles existent vérifient les conditions $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$. Sous ces conditions, il suffit de résoudre l'équation $u(x) = v(x)$.

Exemple 6.4. *Résoudre $\ln(-2x + 1) = \ln(x + 4)$.*
Les solutions doivent vérifier $-2x+1 > 0$ et $x+4 > 0$ d'où $x \in]-4; 1/2[$. On résoud ensuite $-2x+1 = x+4$ et on obtient $x = -1$ qui est bien dans $]-4; 1/2[$. On a alors $S = \{-1\}$.

Exemple 6.5. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$. La condition sur x est $\frac{x+1}{x-1} > 0$ soit $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. L'équation $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$ est équivalente à $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln e$ donc $\frac{x+1}{x-1} = e$ et ainsi $x = \frac{e+1}{e-1}$. On a alors $S = \left\{\frac{e+1}{e-1}\right\}$.*

6.5.2 Inéquation du type $\ln u(x) < \ln v(x)$.

Résolution sur des exemples.

Exemple 6.6. *1. Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $\ln(-x+2) > \ln(x+3)$.

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(-x+2) \leq \ln(x+3)$.

Solution

1. On vérifie que les solutions doivent appartenir à l'intervalle $]-3;2[$. On résoud ensuite $-x+2 > x+3$ et on a $S =]-3;-1/2[$ qui est bien contenu dans $]-3;2[$.
2. L'inéquation $\ln(-x+2) \leq \ln(x+3)$ a pour ensemble solution $[-1/2;2[$.

Exemple 6.7. *Etudier le signe de la fonction* $f(x) = \ln\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$.

Solution Il suffit de résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.
On vérifie que l'ensemble solution est contenu dans $]-\infty;-1/2[\cup]1;+\infty[$. On remarquera en effet que $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} = (x-1)(x+\frac{1}{2})$. L'équation $f(x) = 0$ conduit à $\ln\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \ln 1$ donc $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-1 = 0$ d'où $x \in \{-1;\frac{3}{2}\}$.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]3/2;+\infty[;$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1;-1/2[\cup]1;3/2[.$$

Etudier et représenter la fonction $f(x) =$

6.6 Logarithme décimal

Définition 6.3. *On appelle fonction logarithme décimal la fonction notée* log *et définie sur* $]0;+\infty[$ *par*

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

10 *est la base du logarithme décimal.*

Définition 6.4 (Logarithme de base a)**.** *Soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. *On appelle logarithme de base* a *la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par*

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$