**Ministère des Enseignements**
**Office du Baccalauréat du Cameroun**

**Examen : Baccalauréat**
**Série : C et E**
**Epreuve : MATHEMATIQUES**
**Durée : 4h Coefficient : 5(C) : 4(E)**

***L'épreuve comporte trois exercices et un problème***

**Exercice 1** (série E uniquement(4points)).

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ , on considère les points :
$A(-4; 6; -1)$ ; $B(1, 2, 2)$ ; $C(-1; 4; 3)$.

1. (a) Démontrer que les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés. [0.5pt]
   (b) Calculer l'aire du triangle $ABC$. [0.5pt]
2. Ecrire une équation cartésienne du plan $(ABC)$. [1pt]
3. Soit $I$ le milieu de $[AC]$, et $D = S_I(B)$ où $S_I$ désigne la symétrie de centre $I$.
   (a) Démontrer que les points $A, B, C$ et $D$ sont coplanaires. [1pt]
   (b) Donner la nature du quadrilatère $ABCD$ et puis calculer son aire. [1pt]

**Exercice 1** (série C uniquement(4points)).

L'entier naturel $S$ désigne la somme des diviseurs positifs de $p^4$ où $p$ est un nombre premier plus grand que 2.

1. Exprimer $S$ en fonction de $p$. [0.5pt]
2. Démontrer que $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$ [1pt]
3. On suppose que $S$ est un carré parfait et on pose $S = n^2$ où $n$ est un entier naturel.
   (a) Etablir l'existence et l'unicité de $n$ lorsque $p$ est fixé. (*On pourra utiliser la question 2.*) [0.5pt]
   (b) Exprimer $n$ en fonction de $p$. [0.5pt]
   (c) Etablir que $p$ vérifie la relation $3 + 2p - p^2 = 0$. (*On utilisera le fait que* $4S = 4n^2$). [1pt]
   (d) Déduire de 3.$(c)$, $p$ et puis $n$. [0.5pt]

**Exercice 2** ((4points)).

Un dé cubique pipé est tel que :
deux faces sont marquées 2 ; trois faces sont marquées 4, et une face marquée 6.
La probabilité $p_i$ d'apparition de la face $i$ est proportionnelle au nombre $i$.

1. Calculer les nombres $p_2$, $p_4$, $p_6$. [1.5pt]
2. On suppose dans la suite que $p_2 = \dfrac{1}{6}$ ; $p_4 = \dfrac{1}{3}$ et $p_6 = \dfrac{1}{2}$.
   On lance deux fois de suite le dé précédent, on note $i$ le résultat du premier lancer et $j$ le résultat du deuxième lancer. On définit la variable aléatoire $X$ qui au couple $(i, j)$ associe le nombre $i - j$.
   (a) Déterminer l'univers-image de $X$. [1pt]
   (b) Déterminer la loi de probabilité de $X$. [1.5pt]

## PROBLEME (12pts)

***Le problème comprend trois parties A, B et C obligatoires. La partie C est indépendante.***

### Partie A

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1. (a) Calculer la dérivée $f'$ de $f$ et dresser le tableau de variation de $f$. [0.75pt]

(b) Etudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la position relative de $(C_f)$ par rapport à sa tangente $T_0$ en $O$. [0.75pt]

(c) Démontrer que l'origine $O$ du repère est un point d'inflexion pour la courbe $(C_f)$. [0.5pt]

2. (a) Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. [0.5pt]

(b) Soit $g$ la bijection réciproque de $f$ et $(C_g)$ sa courbe représentative. Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. [0.5pt]

3. Construire dans le même graphique les courbes $(C_f)$ et $(C_g)$. (*On prendra* 2*cm comme unité sur les axes de coordonnées* ) [1.5pt]

4. Pour tout entier naturel $n$ strictement positif, on définit la suite numérique $(U_n)$ par :
.
$$U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} (\ln(1+x) - \ln(1-x))\, dx.$$

(a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel non nul, $U_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right) \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}$. [1pt]

(b) Calculer la limite de la suite $(U_n)$ et interpréter graphiquement le résultat. [0.75pt]

**Partie B**

5. Soit $S$ la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta)$ : $y = x$ et $T$ la translation de vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. On pose $\varphi = T \circ S$.

(a) Donner la nature de l'application $\varphi$. [0.5pt]

(b) Construire l'image par $\varphi$ de la courbe $(C_f)$. [0.75pt]

6. On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\vec{e}_2 = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, la droite $(\Delta')$ : $x - y - 1 = 0$ et $S'$ la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta')$.

(a) Vérifier que le triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ forme un reprère orthogonal du plan. [0.25pt]

(b) Montrer que dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2$ où $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$ sont des vecteurs colinéaires à $\vec{e}_1$ et à $\vec{e}_2$ que l'on précisera. [0.5pt]

(c) On désigne par $H$ et $H'$ les projetés orthogonaux respectifs de $A$ sur $(\Delta)$ et sur $(\Delta')$. Montrer que $\overrightarrow{V}_2 = 2\overrightarrow{HH'}$. En déduire que $T = T_1 \circ S' \circ S$ où $T_1$ est une translation dont on donnera le vecteur. [1pt]

(d) Montrer que $\varphi = T_1 \circ S'$. [0.25pt]

**Partie**

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit $(D)$ la droite d'équation $x = 2$. Les points $M$ et $F$ du plan $(P)$ ont pour affixes respectives $z$ et $1 - i$.

1. Exprimer en fonction de $z$, la distance de $M$ à la droite $(D)$. [0.5pt]

2. On suppose $z + \bar{z} - 4 \neq 0$. Pour tout réel $m$ strictement positif, $(\Gamma_m)$ est l'ensemble des points $M$ dont l'affixe $z$ est solution de l'équation $(E_m)$ suivante : $|z - 1 + i| - m|\bar{z} + z - 4| = 0$.

(a) Déterminer suivant les valeurs de $m$ la nature de $(\Gamma_m)$. [1pt]

(b) Pour $m = 1$, donner les éléments caractéristiques de $(\Gamma_1)$. [1pt]