Ministère des Enseignements Secondaires
Lycée de Maroua Kongola
B.P. 329 Maroua
Département de **Mathématiques**

Année Scolaire 2009/2010
Classe : $1^{\text{ère}}$C
Coef : 6 ; Durée : 3 h
Prof : M. Loumsia A.

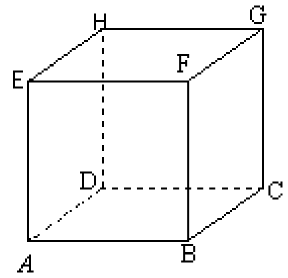
SÉQUENCE N°3 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / JANVIER 2010

L'épreuve comporte 3 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [2.5points]

$ABCDEFGH$ est un cube de centre O tel que $AB = 1$. L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des points G, H, F et C dans ce repère. 4×0.25pt
2. Calculer $\overrightarrow{GF}.\overrightarrow{HC}$. En déduire que (GF) et (HC) sont orthogonales. 1pt
3. (GF) et (HC) sont-elles perpendiculaires ? Justifier votre réponse. 0.5pt



Exercice 2 [3points]

On considère dans $[0; 2\pi]$ les équations :

(E) : $\sin x \cos x + \cos^2 x = \cos 2x$

(E') : $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$

1. a. Montrer que les équations (E) et (E') sont équivalentes dans $[0; 2\pi]$ 1pt
   b. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation (E). 1pt
2. Placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de cette équation. On prendra 3 cm comme unité de longueur. 1pt

Exercice 3 [3.5points]

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient $A(-2,1)$, $B(2,1)$ et $C(3,-1)$ trois points du plan P.

1. a. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$ 0.5pt
   b. Soit M un point du plan. Exprimer le réel $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ en fonction de IM et AB. 1pt
   c. En déduire la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$. 0.5pt
   d. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}$. 0.5pt
2. a. Déterminer les coordonnées du point G, barycentre des points pondérés : $(A,2)$; $(B,-5)$ et $(C,1)$. 0.5pt
   b. Placer le point G dans le repère. 0.5pt

Problème [11points]

Partie A :

Soit $SABCD$ une pyramide dont la base $ABCD$ est un carré de côté 1 et les faces sont des triangles équilatéraux. On pose : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{w}$.

1. Calculer : $\| \overrightarrow{u} \|$, $\| \overrightarrow{v} \|$, $\| \overrightarrow{w} \|$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u}$. 6× 0.25pt
2. a. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ et $\overrightarrow{SD}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. 4×0.25pt
   b. Établir que les droites (SA) et (SB) sont respectivement perpendiculaires aux droites (SC) et (SD). 2×0.5pt
3. Déterminer un point I du plan (ABC) tel que la droite (SI) soit orthogonale au plan (SAB). *(On pourra exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.)* 1pt

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x-2}$. Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f et $(\mathscr{H})$ la courbe d'équation $y = \dfrac{-2}{x}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1. a. Déterminer (par ses coordonnées) le vecteur de translation qui transforme $(\mathscr{H})$ en $(\mathscr{C}_f)$. 0.5pt
   b. Construire $(\mathscr{H})$ et $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère. 2× 0.5pt
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f. 1pt
3. Déterminer graphiquement :
   a. l'abscisse du point I intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de l'axe des abscisses. 0.5pt
   b. les solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{-2}{x}$. 0.5pt
4. a. Vérifier que pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a : $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ 0.5pt
   b. Retrouver algébriquement l'abscisse de I. 0.25pt
5. a. Déduire des résultats précédents, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) \geqslant 0$. 0.75pt
   b. Tracer dans le même repère orthonormé, la courbe de la fonction h définie par : $h(x) = |f(x)|$ 0.5pt
6. Soit un réel k, déterminer en fonction de k le nombre et le signe des solutions de l'équation $h(x) = k$. 1pt

« Le succès n'est pas un gros lot qui se gagne à la loterie du hasard, mais le couronnement logique d'un travail intelligent et persévérant. »

R. de St Laurent