UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE SUPERIEURE DE YAOUNDE
Concours d'entrée en première année du second cycle : Session de 2003
Filière : Mathématiques
Epreuves d'Algèbre et Analyse Durée : 3heures.

EXERCICE 1 :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On note E l'espace vectoriel des fonctions f définies et continues sur $[a, b]$ tellesq que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que si une primitive sur $[a, b]$ de f appartient à E, cette primitive est unique.
2. Pour $x \in [a, b]$, on pose $h(x) = \int_a^b \lambda(t, x) f(t)dt$ où $\lambda(t, x) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a} \text{ si } a \leq t \leq x \\ \frac{t-b}{b-a} \text{ si } x \leq t \leq b \end{cases}$.
   (a) Etudier la dérivabilité de h sur $[a, b]$, en précisant le nombre dérivé le cas échéant.
   (b) Calculer $\int_a^b h(x)dx$.
   (c) Montrer que tout $f \in E$ admet effectivement dans E une primitive unique.
3. E est muni de la norme de la convergence uniforme, (ie $\|f\| = sup\{|f(x)|, x \in [a, b]\}$). Soit $\Gamma : E \to E$ qui à f associe l'unique primitive de $f \in E$.
   (a) Montrez que Γ est linéaire.
   (b) Montrez que Γ est continue.
   (c) Déterminez $\Gamma(f)$ lorsque $\forall x \in [a, b]$, $f(x) = x - \frac{a+b}{2}$.

EXERCICE 2 :

On dit qu'un endomorphisme symétrique u d'un espace vectoriel euclidien E est positif si et seulement si $\forall x \in E$, $(u(x), x) \geq 0$.

1. Montrer que u est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
2. On suppose $E = \mathbb{R}^3$. Pour quelles valeurs de λ, l'endomorphisme u, dont la matrice dans le base canonique de E est
$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$
est positif ?

EXERCICE 3 :

Soit A un anneau commutatif unitaire, S une partie non vide de A telle que :
i. $0 \notin S$, **ii.** $\forall (a, b) \in S$, $ab \in S$.
On pose :
$$\mathcal{S} = \{I, \text{ idéal de } A : I \cap S = \emptyset\}.$$

1. Montrez que :
   (a) $\mathcal{S} \neq \emptyset$.
   (b) Si $(I_n)_n$ est une suite croissante de $(\mathcal{S}, \subset)$, alors $I = \bigcup_n I_n \in \mathcal{S}$.
   (c) $(\mathcal{S}, \subset)$ contient au moins un élément maximal (appliquer le lemme de Zorn)
   (d) Si J est un idéal maximal de $\mathcal{S}$, alors J est un idéal premier de A.
2. On pose $E = \{0\} \cup \{x \in A : x \text{ diviseur de zéro}\}$. Déterminer un idéal premier I de A tel que $I \subset E$.