

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE YAOUNDE

Concours d'entrée en première année du second cycle : Session de 2004

Filière : Mathématiques

Epreuves d'Algèbre et Analyse Durée : 3heures.

EXERCICE 1 :

Dire si chacune des assertions suivantes est juste ou fausse.

1. Il existe des parties de l'ensemble E de $\mathbb{R}$ des nombres réels qui ne sont ni compactes ni connexes.
2. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
3. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel normé de dimension finie est continu.
4. Deux distances définissant la même structure topologique sur un même espace sont équivalentes.
5. Deux normes définissant la même structure topologique sur un même espace vectoriel sont équivalentes.
6. Si E est un espace vectoriel complexe normé, alors tout sous-espace vectoriel F de E borné contient un seul élément.
7. La suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{5}{2}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{5}{u_n} \right)$, est strictement croissante et converge vers $\sqrt{5}$.
8. L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx$ vaut $-\frac{1}{2}$.
9. La suite de fonction (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$ converge uniformément sur l'intervalle $[0; 1]$.
10. La série de fonctions $\sum_n \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ converge uniformément sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

EXERCICE 2 :

Soient G un groupe d'élément neutre e , G_1 et G_2 deux sous-groupes de G .

G est un produit semi-direct de G_1 et G_2 si :

1. $G = G_1 G_2$,
2. $G_1 \cap G_2 = \{e\}$,
3. G_1 est normal dans G .

G est un produit direct de G_1 et G_2 si :

1. $G = G_1 G_2$,
2. $G_1 \cap G_2 = \{e\}$,
3. G_1 est normal dans G .
4. G_2 est normal dans G .

Si H est un sous-groupe de G , $Aut(H)$ désigne le groupe des automorphismes de H .

1. On suppose que G est un produit semi-direct de G_1 et G_2 .

(a) Montrer qu'il existe un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \phi & G_2 & \rightarrow Aut(G_1) \\ & b & \mapsto \tilde{b} \end{array}$$

vérifiant

$$\forall a \in G_1, \forall b \in G_2, ba = \tilde{b}(a)b.$$

(b) En déduire que G_2 est isomorphe à G/G_1 .

2. Soit H et K deux sous-groupes de G . On suppose qu'il existe un morphisme de groupes

$$\begin{array}{ccc} \phi & K & \rightarrow \text{Aut}(H) \\ & b & \mapsto \tilde{b} \end{array}$$

(a) Montrer que $H \times K$ est un groupe lorsqu'il est muni de l'opération définie par

$$\forall (a, b), (c, d) \in H \times K, (a, b) \cdot (c, d) = (a\tilde{b}(c), bd).$$

(b) Déterminer deux sous-groupes H' et K' de $H \times K$, isomorphes respectivement à H et à K .

(c) Montrer que $H \times K$ est un produit semi-direct de H' et K' .

(d) Donner un exemple de groupe qui soit produit semi-direct sans être produit direct de sous-groupe.