

**UNIVERSITE DE YAOUNDE I**  
**ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE YAOUNDE**  
**Concours d'entrée en première année du second cycle : Session de 2006**

Filière : Mathématiques  
 Epreuves d'Algèbre et Analyse    Durée : 3heures.

**EXERCICE 1 [Algèbre] :**

1. Soient  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , et  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A$ .
  - (a) Vérifier que  $A$  n'est pas diagonalisable.
  - (b) Chercher deux vecteurs propres  $u$  et  $v$  de  $A$  linéairement indépendants.
  - (c) Déterminer un troisième vecteur  $w$  tel que  $(u, v, w)$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ .
  - (d) Ecrire la matrice de  $\varphi$  dans cette base.
  - (e) Résoudre le système différentiel  $X' = AX$ .
2. Soit  $R$  un anneau,  $S$  un sous-anneau de  $R$  et  $I$  un idéal de  $R$ .
  - (a) Montrer que  $S + I = \{s + i : s \in S, i \in I\}$  est un sous-anneau de  $R$ .
  - (b) Montrer que  $S \cap I$  est un idéal de  $S$ .
  - (c) Définir une addition et une multiplication sur  $R/I$  et montrer que ces opérations sont bien définies.
  - (d) Montrer que l'application  $s \mapsto s + I$  est un morphisme d'anneaux de  $S \mapsto R/I$ .
  - (e) Montrer que  $S/(S \cap I)$  est isomorphe à  $S + I/I$ , (on pourra utiliser le premier théorème d'isomorphisme).

**EXERCICE 2 [Espaces métriques]**

*L'objectif de cette partie est de démontrer qu'un espace métrique  $(E, d)$  est compact si et seulement si toute suite d'éléments de  $(E, d)$  admet une sous-suite convergente.*

Soient  $(E, d)$  un espace métrique et  $(E, \mathcal{T})$  l'espace topologique associé à  $(E, d)$ .

**Section A** Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $(E, d)$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $F_n$  l'adhérence de  $\{x_k : k \geq n\}$  dans  $(E, \mathcal{T})$ .

A.1 Montrer que  $(x_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $x$  dans  $E$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

A.2 Montrer que  $(F_n)$  est une suite décroissante de fermés de  $(E, \mathcal{T})$ .

A.3 Montrer que si  $\bigcap_n F_n = \emptyset$ , alors  $(F_n^c)$  est un recouvrement ouvert de  $E$ .

A.4 Montrer que si  $(E, \mathcal{T})$  est compact, alors  $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$ .

A.5 Montrer que si  $(E, \mathcal{T})$  est compact, il existe  $x \in E$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$B(x, \varepsilon) \cap \{x_k : k \geq n\} \neq \emptyset.$$

A.6 En déduire que, la suite  $(x_n)$  admet une sous-suite  $(x_{k_n})$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_{k_n} \in B(x, 1/n)$ .

A.7 Conclure que si  $(E, \mathcal{T})$  est compact, alors toute suite  $(x_n)$  de  $E$  admet une sous-suite convergente.

**Section B** On suppose que toute suite  $(x_n)$  de  $(E, \mathcal{T})$  admet une sous-suite convergente dans  $(E, \mathcal{T})$ . Soit  $(V_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $E$ . Pour  $x \in E$ , on pose

$$r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{r > 0 : \exists i \in I, B(x, r) \subset V_i\}.$$

B.1 Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $\exists i \in I$ ,  $\exists r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset V_i$ .

B.2 Montrer que  $\forall x \in E$ ,  $r(x) > 0$ .

B.3 On suppose que  $\inf_{x \in E} (r(x)) = 0$ .

B.3.a Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe  $x_n \in E$  tel que  $r(x_n) < \frac{1}{n}$ .

B.3.b En déduire que l'on peut extraire de la suite  $(x_n)$  une sous-suite  $(x_{k_n})$  qui converge vers  $x^* \in E$ .

Soit  $r^* > 0$  et  $i \in I$  tel que  $B(x^*, r^*) \subset V_i$ .

Démontrer qu'il existe  $n_0 \geq 1$  tel que  $d(x^*, x_{k_{n_0}}) < \frac{r^*}{2}$  et  $r(x_{k_{n_0}}) < \frac{r^*}{4}$ .

B.3.c Montrer que  $d(x^*, x_{k_{n_0}}) < \frac{r^*}{2}$  implique  $B(x_{k_{n_0}}, \frac{r^*}{2}) \subset V_i$ . Déduire que cela contredit la condition  $r(x_{k_{n_0}}) < \frac{r^*}{4}$  et conclure que  $\inf_{x \in E} (r(x)) > 0$ .

B.4 Soit  $r_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $0 < r_0 < \inf_{x \in E} (r(x))$ . On suppose que  $E$  ne peut pas être recouvert par un nombre fini de boules ouverte de rayon  $r_0$ .

B.4.a Démontrer qu'il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $E$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_{n+1} \notin B(x_0, r_0) \cup \dots \cup B(x_n, r_0).$$

B.4.b Prouver que pour tout  $n$  et  $m$  tels que  $n > m$ , on a :  $d(x_n, x_m) \geq r_0$ .

B.4.c Déduire que  $(x_n)$  n'est pas convergente.

B.4.d Conclure qu'il existe un nombre fini d'éléments  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de  $E$  tels que  $E = \bigcup_{k=0}^n B(x_k, r_0)$ .

B.4.e Démontrer que  $\forall x \in E$ ,  $\exists i \in I$ ,  $B(x, r_0) \subset V_i$ .

B.5 Conclure que  $(E, \mathcal{T})$  est compact.

**Section C.** Montrer que : un espace métrique  $(E, d)$  est compact si et seulement si toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $E$  admet une sous-suite  $(x_{k_n})$  convergente dans  $(E, d)$ .