UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE SUPERIEURE DE YAOUNDE
Concours d'entrée en première année du second cycle : Session de 2008
Filière : Mathématiques
Epreuves d'Algèbre et Analyse   Durée : 3heures.

PARTIE 1 : ALGEBRE

PROBLEME 1 :

Soient G un groupe d'ordre $n = pq$ où p et q sont des nombres premiers et e son élément neutre.

1. Montrer que G a au moins un sous-groupe distinct de $\{e\}$ et de lui-même.
2. Si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, quels sont ses sous-groupes ?
3. Soient A et B deux sous-groupes propres de G tels que $A \neq B$.
   (a) Montrer que A et B sont des sous groupes propres dont les ordre sont des nombres premiers.
   (b) En déduire que $A \cap B = \{e\}$.
4. Si $x \in G$, montrer qu'il existe deux puissances y et z de x d'ordres respectifs p et q, telles que $x = yz = zy$. En déduire que G est le produit de ses sous-groupes de Sylow.
5. Soient P un sous-groupe de Sylow, N son normalisateur et K le normalisateur de N. Montrer que N est son propre normalisateur.

PROBLEME 2 :

1. Montrer que $\sqrt{13}$ est irrationnel.
2. (a) Prouver que le groupe multiplicatif des éléments non nuls de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ est cyclique de générateur $\overline{2}$.
   (b) Résoudre la congruence $x^x \equiv 2 \pmod{13}$.
3. Soit A l'ensemble des réels x de la forme $x = a + b\sqrt{13}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que :
   (a) $\forall x \in A$, les entiers a et b tels que $x = a + b\sqrt{13}$ sont uniques.
   (b) A est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{R}, +, \times)$.
4. Soit f l'application de A dans A qui, à $x = a + b\sqrt{13}$ fait correspondre $f(x) = \overline{x} = a - b\sqrt{13}$. On note $\mathcal{N}(x) = x\overline{x}$.
   (a) Vérifier que f est un morphisme d'anneaux.
   (b) En déduire que $\forall (x, x') \in A^2$, on a $N(xx') = N(x)N(x')$.
5. On pose $\mathcal{U}(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A.
   (a) Montrer que $\mathcal{U}(A) = \{x \in A, \mathcal{N}(x) \in \{-1, 1\}\}$ et que $2 \in \mathcal{U}(A)$.
   (b) En déduire que les équations $a^2 - 13b^2 = \pm 2$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, n'ont pas de solutions entières.

PARTIE 2 : ALNALYSE

EXERCICE 1 :

Soit E l'espace des suites complexes $u = (u_n)_n$ bornées et telles que $u_0 = 0$. On définit respectivement $\mathcal{N}_\infty$ et $\mathcal{N}$ par :

$$\forall u \in E, \mathcal{N}_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|, \quad \mathcal{N}(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|.$$

1. Montrer que $\mathcal{N}_\infty$ et $\mathcal{N}$ sont des norme sur E.
2. (a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $\mathcal{N} \leq k\mathcal{N}_\infty$.
   (b) Quel est le plus petit k possible ?
3. Les normes $\mathcal{N}_\infty$ et $\mathcal{N}$ sont-elles équivalentes ?

EXERCICE 2 :

Calculer par la méthode des résidus, les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$ pour $a \notin [-1,1]$.
2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2+a}$ pour a positif.
3. $K = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+x+1}$

PROBLEME :

Soit $U =]0;+\infty[\times\mathbb{R}$. On cherche à déterminer les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, telles que

$$\forall (x,y) \in U,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}. \tag{1}$$

1. Soit $\varphi : U \to U$ l'application définie en posant $\varphi(x,y) = \left(x, \dfrac{y}{x}\right)$.
   (a) Montrer que φ est bijective de classe C^1 et que l'application réciproque est aussi de classe C^1.
   (b) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g = f\circ\varphi^{-1}$. Montrer que g est de classe C^1 et que f vérifie (1) si et seulement si g vérifie

$$\forall (x,y) \in U, \quad x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y. \tag{2}$$

2. Déterminer les fonctions $g : U \to \mathbb{R}$ vérifiant (2).
3. Déterminer les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ vérifiant (1).
4. Trouver les fonctions $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad Grad_F(x,y) = (x^3 - xy^2, y^3 - x^2y).$$