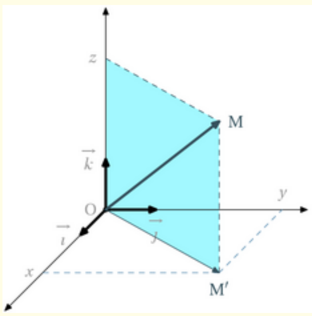
Chapitre: Vecteurs de l'espace

Préambule

Nous avons pu apprécier en géométrie plane la puissance et la maniabilité de l'outil vectoriel, du produit scalaire et du barycentre. L'objet de ce chapitre est d'étendre l'espace l'usage de ces outils, en particulier pour déterminer des droites et des plans.
Dans ce chapitre, $\mathscr{E}$ désigne l'espace et $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.
Le chapitre est structuré comme suit :

Table des matières



« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE

1 Calculs sur les vecteurs de l'espace

1.1 Définitions et propriétés

1.1.1 Définition

Un vecteur est un segment de droite orienté. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
– une direction, celle de la droite (AB) ;
– un sens, le sens du parcours de A vers B.
– une longueur, celle du segment $[AB]$.

1.1.2 Propriétés

a) Relation de Chasles
Soit A, B, $C \in \mathscr{E}$, nous avons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
b) Calcul vectoriel
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et α ; β deux réels ; nous avons les résultats suivants :

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
2. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$
3. $\alpha(\beta)\overrightarrow{u} = (\alpha\beta)\overrightarrow{u}$
4. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
5. $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$
6. $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leqslant ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$
7. $||\alpha\overrightarrow{u}|| = |\alpha|||\overrightarrow{u}||$

1.2 Barycentre

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$; $B(x_B, y_B, z_B)$; $C(x_C, y_C, z_C)$ trois points de l'espace et α, β, γ trois nombres réels. Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, alors il existe un unique point G de $\mathscr{E}$ tel que $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ et G a pour coordonnées :

$$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta y_A + \gamma z_A}{\alpha+\beta+\gamma} ; \frac{\alpha x_B + \beta y_B + \gamma z_B}{\alpha+\beta+\gamma} ; \frac{\alpha x_C + \beta y_C + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

Exemple
(exemple P. 125)
$ABCD$ est un tétraèdre. On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[CD]$, par G l'isobarycentre des points A, B, C et D, par A' le centre de gravité du triangle BCD.

1. écrire G comme barycentre des points A et A'.
2. En déduire que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$
3. écrire G comme barycentre des point I et J.
4. En déduire que G est milieu du segment $[IJ]$ et déterminer ses coordonnées.

Le point G est appelé centre de gravité du tétraèdre $ABCD$.

1.3 Repère de droites et de plans de l'espace

1.3.1 Repère de droites

Soit A un point de $\mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est la droite $(\mathscr{D})$ de repère $(A, \overrightarrow{u})$.
$M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$. $(A, \overrightarrow{u})$ est donc un repère de la droite $\mathscr{D}$

1.3.2 Repère d'un plan

Soit A un point de $\mathscr{E}$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe des réels α ; β avec $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est le plan passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{v}$. $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est donc un repère de ce plan

1.4 Vecteurs coplanaires

1.4.1 Définition

Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ n vecteurs de l'espace. On dit que ces n vecteurs sont coplanaires si étant donné un point O de $\mathscr{E}$ et n points $A_1, A_2, \cdots; A_n$ de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{OA_1} = \vec{u}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{u}_2, \cdots$, $\overrightarrow{OA_n} = \vec{u}_n$; les points $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont coplanaires.

1.4.2 Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ 3 vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non colinéaires.

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe 3 réels α ; β et γ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires si et seulement si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

Exemple

$ABCDEFGH$ est un cube. On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$.
Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. On pose $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ (Rep.$-2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$)

2 Repérage dans l'espace

2.1 Bases et repères

2.1.1 Définition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$.

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de $\mathscr{W}$ si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont non coplanaires.
- Un repère de $\mathscr{E}$ est tout quadruplet $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où O est un point de $\mathscr{E}$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de $\mathscr{W}$.
- un repère$(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ repère est dit *orthogonal* si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont orthogonaux 2 é 2.

  Exemple

  Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. Le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est orthogonal

- un repère$(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est dit *orthonormé* si

  - il est orthogonal

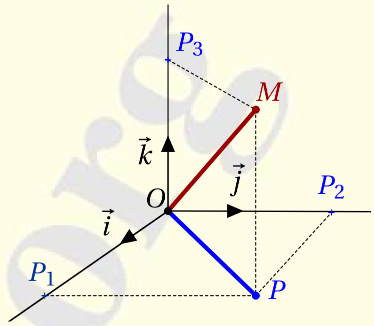
  - $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = ||\vec{w}|| = 1$

  Exemple

  Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. Le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est orthonormé

  Exo 2b P.135

2.1.2 Représentation d'un point dans un repère de l'espace



$\mathscr{E}$ est muni du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit M le point de coordonnées (x, y, z). Pour placer le point M on peut utiliser la construction suivante :

- On place les points P_1, P_2, P_3 sur les axes tel que : $\overrightarrow{OP}_1 = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OP}_2 = y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OP}_3 = z\vec{k}$
- On construit le point P tel que : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$
- On construit le point PM tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP_3}$

  On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Exo 2a ; 2c ; 2d ; 2e P135

3 Produit scalaire dans l'espace

3.1 Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$ et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle Produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel $\vec{u}.\vec{v}$ défini par : $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\widehat{BAC})$

3.2 Propriétés

1. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel, on a :

P_1 $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
P_2 $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
P_3 $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v})$

Exemple

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$.

2. **Expression analytique du produit scalaire**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
On pose $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$
$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$. $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{xx' + yy' + zz'}$.
De plus si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

4 Surface de niveau

4.1 Sphère

1. Soit A et B deux points de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.

2. $\mathscr{E}$ étant muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon r.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathscr{S} &\Leftrightarrow ||\overrightarrow{\Omega M}|| = r \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = r^2 (\text{ Équation cartésienne}) \end{aligned}$$

4.2 Surface de niveau $M \mapsto aMA^2 + bMB^2$

Distinguer le cas $a + b \neq 0$ et le cas $a + b = 0$.

4.3 Surface de niveau $M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Exercices é faire : 1, 2, 5, 8, 17, 24, 25 P.142