Lycée de Japoma
Département de Mathématiques
Njionou Patrick, S.
pnjionu@easy-maths.org

Année 2011-2012
Feuille d'Exercices N°1
Classes : Premières C& D

Exercice 1

Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}^2$ suivant les valeurs du paramètre réel m les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} mx - y = m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x + my = 2m^2 - 1 \end{cases}$

Exercice 2

Soit a et b deux réels. On considère le système $\begin{cases} x + y + xy = a \\ (x - y)^2 = b \end{cases}$

1. Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}^2$ ce système.
2. Dans un plan rapporté à un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on considère le point M de coordonnées (a, b). Déterminer le nombre des solutions (x, y) du système d'après la position du point M dans le plan.
3. Déterminer les solutions de ce système dans le cas $a = 2$ et $b = 4$.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant $\begin{cases} x + \sqrt{3}y = -1 \\ \sqrt{3}x - y = 0 \end{cases}$.
2. En déduire dans $[-\pi; \pi]^2$ les solutions du système $\begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos y = -1 \\ \sqrt{3}\sin x - \cos y = 0 \end{cases}$.

Exercice 4

1. Montrer que $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ et $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
2. Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $\cos 4x = \cos 3x$.
3. On considère le polynôme P défini par $P(x) = 8\,x^4 - 4\,x^3 - 8\,x^2 + 3\,x + 1$.
   (a) On pose $x = \cos\alpha$.
   Montrer que $P(x) = 0$ est équivalent à $\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$.
   (b) En déduire les solutions exactes de $P(x) = 0$.

Exercice 5

1. Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation (E) : $\sin 4x = \sin 3x$.
2. Montrer que (E) est équivalente à $\sin x(8\cos^3 x - 4\cos^2 x - 4\cos x + 1) = 0$.
3. On pose $Q(x) = 8\,x^3 - 4\,x^2 - 4\,x + 1$. En utilisant l'équation (E), déterminer les solutions exactes de l'équation $Q(x) = 0$.

Exercice 6

1. Démontrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2\sin a\cos b$, .
2. En posant $a + b = p$ et $a - b = q$, démontrer que
   $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.
3. En déduire que $\sin 2x + \sin x + \sin 3x = \sin 2x(1 + 2\cos x)$.
4. Déduire alors de ce qui précède les solutions dans $]-\pi, \pi[$ de l'équation
   $\sin 2x + \sin x + \sin 3x = 0$.

Exercice 7

Soit (P) le plan euclidien. M et N deux points de (P).

1. Soit A, B, C trois points de (P) tels que $AB = AC = 5$ et $BC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. Construire G, barycentre de $\{(A, 2); (B, 3); (C, 3)\}$.

3. Soit f l'application de (P) dans $\mathbb{R}$, qui à tout point M associe le réel

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}.$$

Démontrer que, pour tout point M de (P), $f(M) = f(G) + 4MG^2$.
Calculer $f(A)$ et $f(G)$.

4. Déterminer et construire l'ensemble des points M de (P) tels que $f(M) = f(A)$.

Exercice 8

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 5a^2$. Représenter cet ensemble.

Exercice 9

Soit ABC un triangle. On pose $BC = a$, $AB = c$ et $AC = b$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = abc$.

Exercice 10

On considère une triangle ABC et les points K, L et M tels que $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. On suppose que le point M est milieu du segment $[AC]$. Les droites (AL), (BM) et (CK) sont-elles concourantes ?
2. Déterminer la position M sur le segment $[AC]$ pour que les droites (AL), (BM) et (CK) soient concourantes.

Exercice 11

Soit un triangle ABC. On définit les points D, E et F de la façon suivante : $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CA}$ où k est un réel.
Déterminer le réel k pour que les droites (CD), (AE) et (BF) soient concourantes.

Exercice 12

Soit (P) le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On considère les points $A\binom{3}{0}$, $B\binom{1}{2}$ et $C\binom{-1}{0}$.

1. On désigne par G le barycentre du système $\{(A,1);(B,2);(C,-1)\}$.
   (a) Quelle est la nature du triangle ABC ?
   (b) Déterminer les coordonnées de G.
   (c) Démontrer que $\overrightarrow{BG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.
2. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que $MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 0$.

Exercice 13

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x+\sqrt{x+6}}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{x+\sqrt{x+6}}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{2x^2+1}{x^3-1} - \frac{x^2+4}{x^3+1}\right)$.

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}}$. Déterminer une fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, qui prolonge la fonction f et qui est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = E(1-x) + E(1+x)$. Démontrer que f n'est pas continue en 0. f est elle continue en 1 ?
$E(x)$ désigne la partie entière de x.