Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat 2012
Série : $C-E$
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4h Coefficient : 5(C)/ 4(E)

L'épreuve comporte pour chaque série, deux exercices et un problème.

Exercice 1 (série E uniquement). ***(5 points)***

Soit f la fonction définie sur $]0;\pi[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

1. Etudier la fonction f et construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). [1pt]
2. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $]0;\frac{\pi}{2}]$ possède une fonction réciproque g^{-1} dans le même repère que (C). [1pt]
3. Soit $y = g^{-1}(x)$.
   Montrer que $\sin y = \dfrac{1}{x}$ et que $\cos y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. [0,75 pt]
4. En déduire que pour tout x de $]1;+\infty[$, $(g^{-1})'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. [0,75pt]
5. En se servant des résultats précédents, calculer $I = \displaystyle\int_{2\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$. [1,5pt]

Exercice 1 (Série C uniquement). ***(5 points)***

1. Soit N un entier relatif impair. Montrer que $N^2 \equiv 1[8]$. [1pt]
2. Montrer que si un entier relatif M est tel que $M^2 \equiv 1[8]$ alors M est impair. [1pt]
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ léquation $x^2 = 8y+1$. [2pt]
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $y = \dfrac{x^2-1}{8}$ dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) du plan P passe par une infinité de points à coordonnées entières. [1pt]

Exercice 2 (5 points). Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) :
$z^3 + (3-d^2)z + 2i(1+d^2) = 0$, où d est un nombre complexe donné de module 2.

1. (a) Vérifier que $2i$ est une solution de l'équation (E). [0,5pt]
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). [1pt]
2. Dans le plan complexe P, on considère les points A, B, M, et N d'affixes respectives $2i$, $-i$, $-i+d$ et $-i-d$.
   (a) Calculer MN et déterminer le milieu de $[MN]$. [0,5pt]
   (b) En déduire que lorsque d varie dans $\mathbb{C}$, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera. [1pt]
   (c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de O est le centre de gravité du triangle AMN. [1pt]
   (d) En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isolcèle de sommet principal A. [1pt]

Problème :(10.points)
Le problème comporte trois parties A, B et C. Les parties A et b sont liées.
Partie A : 4points.
Soit léquation différentielle (E) : $y'' + (2\ln 2)y' + (\ln 2)^2 y = 0$.

1. (a) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$. [0,5pt]
   (b) Déterminer la solution g de (E) vérifiant : $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. [0,5pt]
2. On considère la fonction numérique u définie pour tout réel x par $u(x) = \dfrac{x}{2^x}$. On note (C) la courbe représentative de u dans un repère orthonormé du plan.
   (a) Montrer que la fonction dérivée u' est définie sur $\mathbb{R}$ par $u'(x) = (1 - x\ln 2)e^{-x\ln 2}$. [0,5pt]
   (b) Dresser le tableau de variation de u. [1pt]
   (c) Présiser les branches infinies de (C). [0,5pt]
   (d) Tracer (C) et sa tangente (T_0) au point d'abscisse 0.
   (Prendre 2cm comme unité sur les axes des coordonnées). [1pt]
3. (a) Prouver que u est une solution particulière de l'équation différentielle (E). [0,5pt]
   (b) En déduire la valeur du nombre réel $(\ln 2)^2 \times \displaystyle\int_0^1 u(x)\,dx$. [0,75pt]

Partie B :

On définit la suite numérique (V_n) par : $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n + 2^{-n}) \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n = u(n)$. [0,5pt]
2. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} V_k$.
   (a) Démontrer par récurrence que $S_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k}\right) - \dfrac{n+1}{2^n}$ pour tout entier naturel n. [1pt]
   (b) Calculer la limite de la suite S_n). [0,5pt]

Partie C :

Dans le plan orienté et muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$; $\vec{e}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$.

1. Démontrer que $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé du plan. [0,5pt]
2. Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation qui transforme $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). [0,5pt]
3. Une conique dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ a pour équation cartésienne $13X^2 + 7Y^2 + 6\sqrt{3}XY = 16$.
   (a) Ecrire l'équation cartésienne réduite de cette conique dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). [1pt]
   (b) En déduire sa nature et son excentricité. [0,75pt]