

UNIVERSITE DE MAROUA
ECOLE NORMALE SUPERIEURE SUPERIEURE DE MAROUA
Concours d'entrée en première année du cycle 1 : Session de Septembre 2012
 Série : Mathématiques
 Epreuves de Mathématiques Durée : 3heures

EXERCICE 1 : _____ **5 points**

Soit A, B, C, D quatre points distincts de l'espace.

1. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

2. On considère un tétraèdre $ABCD$ tel que la droite (AB) soit orthogonale à (CD) et (BC) orthogonale à (AD) . Montrer que (BD) est orthogonale à (AC) .

EXERCICE 2 : _____ **6 points**

1. Montrer que $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 11.
2. Résoudre dans \mathbb{Z} puis dans \mathbb{N} le système $\begin{cases} x \equiv 5[8] \\ x \equiv 4[11]. \end{cases}$
3. (a) Déterminer (x_0, y_0) solution de l'équation $49x - 19y = 0$.
 (b) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $49x - 19y = 7$.

EXERCICE 3 : _____ **4 points**

1. Un endomorphisme f du plan vectoriel \vec{P} vérifie $f \circ f = \hat{0}$ où $\hat{0}$ est l'endomorphisme nul. Montrer que $Im(f) \subseteq Ker(f)$ et que $g = f + Id_{\vec{P}}$ est un automorphisme de \vec{P} .
2. Un endomorphisme f du plan vectoriel \vec{P} vérifie $(f \circ f)(\vec{u}) = -\vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in \vec{P}$. Soit \vec{v} un vecteur non nul de \vec{P} . Montrer que $B = (\vec{v}, f(\vec{v}))$ est une base de \vec{P} et exprimer la matrice de f dans cette base.

EXERCICE 4 : _____ **5 points**

On considère les suites (u_n) définies par : pour tout entier naturel n ,

$$nu_{n+1} = 2 \times \sqrt[3]{u_n} \text{ avec } u_0 = 7, v_n = \ln(u_n), \text{ et } w_n = \ln\left(v_n - \frac{3 \ln 2}{2}\right).$$

1. Démontrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\ln 3$ et en déduire l'expression de v_n en fonction de n .
2. Montrer que la suite (v_n) est convergente en déterminant sa limite.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 2\sqrt{2} \left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.