Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat 2013
Série : C et E
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4h   Coefficient : 5(C)/ 4(E)

L'épreuve comporte trois exercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 à 2. Le candidat devra traiter chacun des exercices et le problème. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1 (série C uniquement)**.** ***(2,5 points)***
N désigne un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$.

1. Démontrer que le reste de la division de N par 100 est l'entier r dont l'écriture en base 10 est $r = \overline{a_1 a_0}$. [1pt]
2. **Application** : Démontrer que le chiffre des unités et le chiffre des dizaines du nombre $N = 7^{7^{7^{7}}}$ sont respectivement 3 et 4. [1,5pt]

Exercice 1 (Série E uniquement)**.** ***(2,5 points)***

Soit f une fonction numérique continue sur $[0;1]$ et telle que pour tout réel $x \in [0;1]$, $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt \geq \frac{1-x^2}{2}$.
Soit F une primitive de f sur $[0;1]$.

1. (a) En intégrant par partie l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, montrer que : [0,75pt]

$$F(1) = \int_0^1 x f(x)\,dx + \int_0^1 F(x)\,dx.$$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,dx \geq \frac{1}{3}$. [0,75pt]

2. (a) Développer et réduire $(f(x) - x)^2$. [0,5pt]

   (b) Déduire que $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2\,dx \geq \frac{1}{3}$. [0,5pt]

Exercice 2 (2,5 points)**.** λ désigne un nombre réel strictement positif. On donne dans l'espace un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2\lambda$ et $AC = \lambda$.

1. Construire le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -1 et 2. [0,5pt]
2. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace vérifiant : $3MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 5\lambda^2$. [0,5pt]
3. On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On donne $B(0,4,0)$ et $C(0,0,2)$.
   (a) Déterminer les coordonnées de G. [0,5pt]
   (b) Ecrire des équations cartésiennes du plan (ABC) et de (Γ). [0,5pt]
   (c) Préciser l'intersection de (ABC) et (Γ). [0,5pt]

Exercice 3 (5 points)**.** α désigne un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$. Le plan complexe orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 \cos^2\alpha - z\sin 2\alpha + 1 = 0$. [1,25pt]
   On note z_1 et z_2 les solutions de cette équation ; z_1 désigne la solution dont la partie imaginaire est positve. A et B désignent les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
2. Quelle est la nature du triangle OAB ? Justifier votre réponse. [1pt]

EASY-MATHS PARTNERSHIP

3. (a) Calculer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$. [0,75pt]

   (b) En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO})$. [0,5pt]

4. Résoudre l'équation différentielle $(\cos^2\alpha)f'' - (\sin 2\alpha)f' + f = 0$ sachant que f est une fonction numérique d'une variable réelle x vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\tan\alpha$. [1,5pt]

Problème :(10.points)

Dans tout le problème, on note

– f la fonction définie dans l'intervalle $]-2, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x+2)$;

– g la fonction définie dans l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x$;

– (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé, l'unité de longueur sur les axes étant égale à 2cm. On appelle :

  (D) la droite d'équation $y = x$ dans le repère précédent ;

  (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$;

  (v_n) la suite numérique définie par $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$.

1. (a) Dresser les tableaux de variation de f et g. [1pt]

   (b) Démontrer que (C_f) et (D) se coupent en deux points M_1 et M_2 dont les abscisses x_1 et x_2 vérifient $-2 < x_1 < -1$ et $1 < x_2 < 2$. [1,5pt]

   (c) Etudier suivant les valeurs de x les positions relatives de (C_f) et (D). [0,75pt]

   (d) Tracer (C_f), (C_g) et (D) après avoir étudier les branches infinies de (C_f) et (C_g). [1,5pt]

2. Démontrer que (C_f) est l'image de (C_g) par la translation de vecteur $-2\vec{\imath}$. [0,25pt]

3. On note (Γ) la partie du plan définie par les droite d'équation $x = -1$; $x = 1$; (C_f) et (D). Calculer à l'aide d'une integration par parties, la valeur exacte de l'aire de (Γ). [0,75pt]

4. On note α et β deux réels tels que $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$. Démontrer que $x_1 < f(\alpha) < x_2 < f(\beta)$. [0,5pt]

5. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante. [0,5pt]

   (b) Démontrer que la suite (v_n) est décroissante. [0,5pt]

   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < x_2 < v_n \leq 2$. [0,5pt]

6. On note I l'intervalle $[1;2]$.

   (a) Démontrer que, pour tout x de I, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3}$. [0,5pt]

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $0 < f(v_n) - f(u_n) < \frac{1}{3}(v_n - u_n)$. [0,5pt]

7. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. [0,5pt]

   (b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite. [0,75pt]

EASY-MATHS PARTNERSHIP