ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 (04 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de Gauss le système :

$$(S) : \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 5x + y - z = 4 \end{cases}$$ **2 pts**

2. Discuter suivant les valeurs du nombre réel m, l'existence et le nombre de solution de l'équation :

$$(m-1)x^2 - 4 - 5m = -m - 4x$$ **2 pts**

Exercice 2 (02.5 points)

Les élèves d'une classe de première disposent de deux options sportives : l'athlétisme et la natation. 27 élèves pratiquent l'athlétisme ; 29 élèves pratiquent la natation ; 11 élèves pratiquent les deux sports et 05 élèves ne pratiquent aucun des deux sports.

1. Combien d'élèves pratiquent uniquement l'athlétisme ? **0.5 pt**
2. Combien d'élèves pratiquent uniquement la natation ? **0.5 pt**
3. Combien d'élèves pratiquent au moins les deux sports ? **0.75 pt**
4. Combien d'élèves y a-t-il dans cette classe ? **0.75 pt**

Exercice 3 (03.5 points)

ABC est un triangle. I et J sont deux points définis par : $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{JA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{JC}$.

1. Faire la figure. **0.5 pt**
2. Justifier que $I = bar\{(B,2);(C,1)\}$ et que $J = bar\{(A,3);(C,1)\}$. **1 pt**
3. Soit G le barycentre des points pondérés $(A,3)$, $(B,4)$ et $(C,2)$.
   (a) Ecrire G comme barycentre des points A et I d'une part et comme barycentre des points B et J d'autre part. **1.5 pt**
   (b) En déduire que les droites (AI) et (BJ) sont sécantes. **0.5 pt**

Problème (10 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A (05 points)

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 11x^2 + 2x - 15$.

1. Vérifier que 1 est une racine de $P(x)$. **0.5 pt**
2. Montrer que $P(x) = (x-1)(2x^2 + 13x + 15)$. **1 pt**
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 + 13x + 15 = 0$. **1 pt**
4. Dresser le tableau de signe du polynôme $P(x)$, puis donner l'ensemble solution de l'inéquation $P(x) > 0$. **1.5 pt**
5. En déduire de la question 3. les solutions de l'équation $2\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + 13\left(x + \frac{5}{3}\right) + 15 = 0$. **1 pt**

Partie B (05 points)

Soit A et B deux points tels que $AB = 4cm$. Soit I et G deux points du plan tels que I soit milieu de $[AB]$ et $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

1. Que représente G pour les points A et B ? **0.5 pt**
2. Calculer GA et GB. **1 pt**
3. On considère l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M du plan tels que : $3MA^2 + 2MB^2 = 60$.
   (a) Montrer que $3MA^2 + 2MB^2 = 5MG^2 - 3GA^2 - 2GB^2$. **1 pt**
   (b) Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{E})$. **1 pt**
4. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 2AB^2$. **1.5 pt**