Chapitre 5

Isométries du plan

Nous completons dans ce chapitre des connaissances déjà acquises en classe de Première et dans le chapitre sur les nombres complexes.

5.1 Définition et propriétés des isométries du plan

Définition 5.1. *On appelle isométrie plane toute bijection du plan dans le plan qui conserve les distances. De façon précise,* $f : (P) \to (P)$ *est une isométrie si* $\forall M, N \in (P)$, $d(M,N) = d(f(M), f(N))$.

Exemple 5.1. *Les translations, les rotations, les symétries othogonales sont des isométries.*

Définition 5.2. *Soit* f *une isométrie plane. On appelle point fixe de* f *tout point* M *du plan tel que* $f(M) = M$. *On dit aussi que* M *est un point invariant de* f.

Exemple 5.2. *Tout point du plan est un point fixe pour l'identité du plan.*
Toute rotation r *qui n'est pas l'identité admet un unique point inveriant qui est son centre.*
L'ensemble des points fixes d'une symétrie orthogonale est l'axe de symétrie.

Proposition 5.1. *La composée de deux isométries plane est une isométrie plane.*

Démonstration. Soit f et g deux isométries planes. Soit A et B deux points du plans. On a

$$d(g(f(A)), g(f(B))) = d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

En plus $g \circ f$ est une bijection donc est une isométrie plane. □

Proposition 5.2. *Soit* f *une isométrie, s'il existe un point* O *du plan tel que* $f(O) = O$, *alors :*

- *ou bien* f *est l'identité du plan auquel cas tout point du plan est invariant,*
- *ou bien* f *est une reflexion par rapport à un axe passant par* O *et alors tous les points de cette droite sont invariants par* f,
- *ou bien* f *est une rotation de centre* O *auquel cas* O *est l'unique point invariant par* f.

Démonstration. Admise. □

Proposition 5.3. *Soit* O *un point donné du plan et* f *une isométrie. Il existe un unique couple* (t, g) *où* t *est une translation et* g *une isométrie fixant* O *tels que* $f = t \circ g$.

Démonstration. Existence : Posons $\vec{u} = \overrightarrow{Of(O)}$ et $g = t^{-1} \circ f$. g est une isométrie comme composée d'isométries. Montrons que $g(O) = O$. Supposons $g(O) = O'$. On a

$$t \circ g = f \Rightarrow t \circ g(O) = f(O) \Rightarrow t(O') = f(O)$$

or $\overrightarrow{O't(O')} = \vec{u}$ d'où $\overrightarrow{O'f(O)} = \vec{u} = \overrightarrow{Of(O)}$. Ainsi $O' = O$ et $g(O) = O$; g fixe le point O. Le couple (t, g) résoud le problème.
Unicié. $f(O) = (t \circ g)(O) = t(g(O)) = t(O)$, donc $\overrightarrow{Ot(O)} = \vec{u}$ qui est unique et par conséquent t est unique. L'unicité de g en découle. □

5.2 Composition et décomposition d'isométrie

5.2.1 Composition de symétries orthogonales

Proposition 5.4 (Composition de symétrie d'axes parallèles)**.** *Soit* (Δ) *et* (Δ') *deux droites parallèles,* O *un point de* (Δ) *et* O' *son projeté orthogonal sur* (Δ')*, alors* $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{OO'}}$.

Démonstration. Soit $M \in (P)$, notons $M_1 = S_\Delta(M)$ et $M' = S_{\Delta'}(M_1) = S_{\Delta'} \circ S_\Delta(M)$.
Comme $M_1 = S_\Delta(M)$, (Δ) est la médiatrice de $[MM_1]$, d'autre part $M' = S_{\Delta'}(M_1)$ donc (Δ') est la médiatrice de $[M_1M']$. Appelons H_1 le milieu de $[MM_1]$ et H_2 le milieu de $[M_1M']$. On a $H_1 \in (\Delta)$ et $H_2 \in (\Delta')$. Alors

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{H_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1H_2} = 2\overrightarrow{H_1H_2} = 2\overrightarrow{OO'}.$$

Ce qui achève la preuve. □

Proposition 5.5 (Composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants)**.** *Soit* (Δ) *et* (Δ') *deux droites sécantes en* O *de vecteurs directeurs respectifs* $\vec{u}$ *et* $\vec{u}'$*, alors :*

$$S_{\Delta'} \circ S_\Delta = r(O, 2(\vec{u}, \vec{u}')).$$

Démonstration. Il est clair que le point O est invariant par $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$. Soit maintenant un point M du plan distinct de O. Notons par M_1 son symétrique par rapport à (Δ) et par M' le symétrique de M_1 par rapport à (Δ'). Il faut montrer que $\begin{cases} OM = OM' \\ (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) \end{cases}$. Comme $S_\delta(M) = M_1$, on a $OM = OM_1$, d'autre part, $S_{\Delta'}(M_1) = M'$ donne $OM_1 = OM'$ d'où $OM = OM'$.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) &= (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'}}) \\ &= 2(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \vec{u}'}) \\ &= 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. □

5.2.2 Décomposition des translations et des rotations

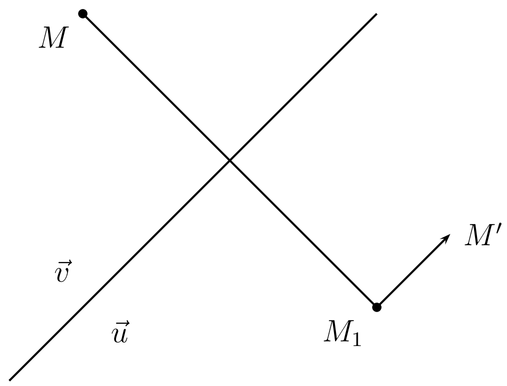
Proposition 5.6 (Décomposition d'une translation)**.** *Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul, alors pour toute droite (Δ) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une unique droite (Δ') telle que $t_{\vec{u}} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.*

Démonstration. Existence : soit (Δ) une droite, la droite (Δ') image de (Δ) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$ vérifie $t_{\vec{u}} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.
Unicité : Supposons qu'il existe une autre droite (Δ'') vérifiant $t_{\vec{u}} = S_{\Delta''} \circ S_{\Delta}$, alors $S_{\Delta''} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$, d'où $(S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}) \circ S_{\Delta} = (S_{\Delta''} \circ S_{\Delta}) \circ S_{\Delta}$, ainsi $S_{\Delta'} \circ (S_{\Delta} \circ S_{\Delta}) = S_{\Delta''} \circ (S_{\Delta} \circ S_{\Delta})$ et donc $S_{\Delta'} = S_{\Delta''}$ c'est-à-dire $(\Delta') = (\Delta'')$. □

Proposition 5.7 (Décomposition d'une rotation)**.** *Soit $r(O, \alpha)$ une rotation de centre O et d'angle α. Etant donnée une droite (Δ) passant par O, il existe une droite (Δ') et une seule telle que : $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = r(O, \alpha)$.*

5.2.3 Symétrie glissée

Définition 5.3. *Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit $\vec{v}$ un vecteur colinéaire à $\vec{u}$. On appelle symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{v}$ la composée de la symétrie axiale d'axe (Δ) et de la translation de vecteur $\vec{v}$.*



Remarque 5.1. $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{(\Delta)}$.

Proposition 5.8. *Les symétries glisées de vecteurs non nuls n'admettent pas de point invariant.*

5.2.4 Composition des translations et des rotations

Proposition 5.9 (Composée de deux rotations de même centre)**.** .
Soit $r_1 = r(O, \alpha)$ et $r_2 = r(O, \alpha')$, alors $r_1 \circ r_2 = r(O, \alpha + \alpha')$.

Démonstration. Poser $r_1 = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}$ et $r_2 = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}$. Alors

$$r_2 \circ r_1 = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = r(O, \alpha + \alpha').$$

□

Proposition 5.10 (Composée de rotation et de translation)**.** *Soit r une rotation d'angle $\theta \neq 0$ et t une translation. Les composées $t \circ r$ et $r \circ t$ sont des rotations d'angle θ mais de centres distincts de celui de r dès que t n'est pas l'identité.*

Démonstration. Posons $r = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}$ et $t = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}$, alors

$$t \circ r = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}, \quad r \circ t = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)}$$

□

5.3 Classification des isométries

5.3.1 Classification à l'aide des points fixes

Proposition 5.11. *Toute isométrie du plan laissant fixe trois points non alignés est l'identité du plan.*

Démonstration. Soit ABC un triangle. f une isométrie telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$. Soit M un point du plan et $M' = f(M)$. On a $M'A = MA$, $M'B = MB$ et $M'C = MC$. Si $M \neq M'$, alors A, B et C sont sur la médiatrice de $[MM']$ donc sont alignés. Ce qui contredit le fait que ABC est un triangle donc $M = M'$. □

Proposition 5.12. *Toute isométrie du plan qui fixe deux points distincts A et B et qui n'est pas l'identité est la symétrie d'axe (AB).*

Démonstration. Soit $A \neq B$ deux points du plan ; $f \neq id$ une isométrie telle que $f(A) = A$ et $f(B) = B$. Soit C un point du plan tel que $C \notin (AB)$. Posons $C' = f(C)$. On a $C' \neq C$ car sinon, f laisserait invariant trois points non alignés. De plus $AC' = AC$ (car $d(A, C) = d(f(A), f(C)) = AC'$) de même $BC' = BC$ donc (AB) est la médiatrice de $[CC']$.
Soit s la symétrie d'axe (AB), $s(f(A)) = A$ et $s(f(B)) = B$, de plus $s(f(C)) = s(C') = C$ donc $s \circ f$ est l'identité, d'où $s = f = s^{-1}$. f est donc la symétrie d'axe (AB). □

Proposition 5.13. *Toute isométrie du plan qui fixe un unique point est une rotation.*

Démonstration. Soit f une isométrie telle que $f(A) = A$ et pour tout $B \neq A$, $B' = f(B) \neq B$. On a $AB' = AB$ donc A est sur la médiatrice de $[BB']$. Soit s la symétrie orthogonale d'axe $(BB') = (\Delta)$. $s(f(A)) = s(A) = A$, $s(f(B)) = s(B') = B$. $s \circ f$ est une isométrie qui fixe deux points distincts donc $s \circ f \neq id$. $s \circ f$ est la symétrie orthogonale d'axe (AB) et par suite $s_{(\Delta)} \circ f = s_{(AB)}$, soit $f = s_{(\Delta)} \circ s_{(AB)}$ qui est une rotation comme composée de symétries orthogonales d'axes sécants. □

Théorème 5.1. *Toute isométrie du plan est soit une translation, soit une rotation soit une symétrie (orthogonale ou glisée).*

5.3.2 Déplacements et antidéplacements

Définition 5.4. *Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés et un anti-déplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.*

Exemple 5.3. *Les rotations, les translations sont des déplacements. Les symétries axiales et glissées sont des anti-déplacements.*

Proposition 5.14.
1. *Toute isométrie est soit un déplacement soit un antidéplacement.*
2. *Tout déplacement est soit une translation soit une rotation.*
3. *Tout antidéplacement est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glisée.*

Proposition 5.15. *La composée de deux déplacements est un déplacement ; la composée de deux anti-déplacements est un déplacement ; la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un anti-déplacement.*

Exposé 6. Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère la symétrie orthogonale s d'axe (OI).

1. Soit $M(z)$ un point d'affixe z. Soit $M'(z')$ l'image de M par s. Exprimer z' en fonction de z.

2. Soit f un antidéplacement quelconque du plan. En écrivant f comme composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale, montrer qu'il existe un réel θ_0 et un nombre complexe α tel que si $M'(z') = f(M(z))$, alors $z' = e^{i\theta_0}\bar{z} + \alpha$.
3. Montrer réciproquement que toute transformation du plan d'expression analytique $z' = e^{i\theta_0}\bar{z} + \alpha$ est un antidéplacement.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante liant α et θ_0 pour que f définie par $z' = e^{i\theta_0}\bar{z} + \alpha$ soit une reflexion.
   Vous exprimerez tout d'abord une telle condition par l'existence d'un point fixe.
5. Application : déterminer le plus précisément possible les caractéristiques de f dans chacun des cas suivants :
   - $z \mapsto z' = i\bar{z} + i$
   - $z \mapsto z' = e^{i\pi/4}\bar{z} + 1$.