Ministère de l'Enseignement Supérieur — **République du Cameroun**
. *Ministry of Higher Education* — Paix-Travail-Patrie

Ecole Normale Supérieure de Yaounde — **Republic Of Cameroon**
Higher Teacher's Training College of Yaounde — Peace-Work-Fatherland

Concours d'entrée en première année du premier cycle
Epreuve majeure : Mathématiques Coef 4 Durée : 3h. Session 2005

A : *QCM, Géométrie de l'espace.*

Pour chaque question une seule est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 *point, une réponse inexacte enlève* 1/2 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total des points est négatif, la note est ramenée à* 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on donne les points $S(1, -2; 0)$ et le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$$A : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{cases}, \; B : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad C : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad D : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \quad (t \text{ réel}).$$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$$A : (-4; 0; 0), \; B : \left(\frac{6}{5}, \frac{-9}{5}; \frac{-3}{5}\right); \; C : \left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right); \; D : \left(\frac{8}{11}, \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right).$$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

$$A : \frac{\sqrt{11}}{3}, \quad B : \frac{3}{\sqrt{11}}, \quad C : \frac{9}{\sqrt{11}}, \quad D : \frac{9}{11}.$$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale :
   A : au point $I(1, -5, 0)$
   B : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$
   C :au cercle de centre S et de rayon 2
   D : au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$.

B : *Exercice de probabilité*

Mille boules numérotées de 0 à 999 sont placées dans une urne. On tire une boule au hasard et on note X le numéro sorti.

1. Calculer la probabilité des événements :
   A : « X est divisible par 5 »
   B : « X se termine par 0 »
   C : « X est multiple de 0 »
   D : « X est divisible par 3 »
2. Déterminer la probabilité des événements :
   $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cap D$, $B \cup D$, $A \cap D$, $A \cup D$ puis $A \cap B$ et $C \cup D$.

C : *Exercices sur les fonctions*

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0, +\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y = y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.
2. Soient h la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé.
   (a) Dresser le tableau de variation de h.
   (b) Déduire que h admet un maximum sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On pose x_0 l'abscisse de ce maximum.
   (c) Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.
   (d) Représenter (C).
   (e) Déterminer l'aire du domaine délimité par (C) et les droites d'équation $x = 1$, $x = e$ et $y = x$.
3. Soit λ un élément de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{e}\right[$. Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1, e[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]e, +\infty[$ tel que $h(a) = h(b) = \lambda$. Ainsi, le couple (a, b) est solution de (E).
4. On considère la fonction s qui à tout nombre réel a de l'intervalle $]1, e[$ associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]e, +\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$. (On ne cherchera pas à exprimer $h(a)$ en fonction de a).

   Par une lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes :
   (a) Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?
   (b) Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?
   (c) Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variation de s.
5. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).