UNIVERSITE DE MAROUA
ECOLE NORMALE SUPERIEURE SUPERIEURE DE MAROUA
Concours d'entrée en première année du cycle 1 : Session d'Août 2009
Série : Mathématiques
Epreuves de Mathématiques Durée : 3heures

Exercice 1 (5pts).

1. Résoudre le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{y+\frac{1}{x}}=2\sqrt{2}\\(x^2+1)y+(y^2+1)x=4xy\end{array}\right. .$$

2. Résoudre l'équation trigonométrique $\dfrac{8\sin^{-2}x+1}{\cos^{-2}x+\tan^2 x}=\coth^2 x+\dfrac{4}{3}$.

Exercice 2 (5pts).

Soit le nombre complexe $u=\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $(i^2=-1)$.

1. Calculer u^2 et u^4. Calculer le module et un argument de u^4.
2. On considère un plan P muni d'un repère orthonormé. A tout point M de coordonnées (x,y), on associe son affixe $z=x+iy$. Déterminer l'ensemble des points M de P pour lesquels le module du produit uz est égal à 8.

Problème

A. Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Soit Γ_1 la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe Γ_1 au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$. Tracer la courbe Γ_1 et la droite T.
3. Sur un même graphique, tracer Γ_2 courbe symétrique de Γ_1 par la symétrie orthogonale d'axe Ox.
4. Soit $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Montrer que Γ a pour équation cartésienne

$$x(x^2+y^2)-y^2=0. \tag{1}$$

B. Interpretation géometrique de (1).
I est un point de coordonnées $(1,0)$ dans le repère $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. C est le cercle de diamètre $[OI]$ et Δ est la tangente à C au point I. Soit D la droite passant par O de coefficient directeur t, $t\in\mathbb{R}$.

1. (a) Déterminer les coordonnées de M tel que $C\cap D=\{O,\ M\}$.
   (b) Déterminer les coordonnées de M' tel que $\Gamma\cap D=\{O,\ M'\}$.
   (c) Déterminer les coordonnées de N tel que $\Delta\cap D=\{N\}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{MN}$.
3. Déterminer l'intersection de Γ et de C.

C. Propriétés géométriques.
Soit M un point de C, N le point d'intersection de (OM) et de (Δ) et M' le point d'intersection de (OM) et Γ. On considère le point P tel que $OINP$ soit un rectangle.

1. Montrer que les triangles INM et $OM'P$ se transforment par une symétrie centrale à déterminer.
2. En déduire que le triangle $PM'N$ est rectangle.
3. Soit F le symétrique de I par rapport à O. On considère la parabole Ω de foyer F et de directrice Δ. La droite (FP) coupe Δ en R. Construire géométriquement le point K de Ω qui se projette orthogonalement en R sur Δ.