Chapitre 13

Applications de l'espace

Dans les classes antérieures, nous avons étudié les transformations du plan : translation, symétries centrale et axiale, rotation, homothétie, similutudes. Dans ce chapitre, on va revoir ces transformations dans l'espace. On introduira en plus des en plus des transformations déjà vues dans le plan, les notions de reflexions, de démi-tours (symétrie axiale) L'étude sera essentiellement analytique.

13.1 Translation de l'espace

Définition 13.1. *Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace, on appelle translation de vecteur $\vec{u}$, l'application $t_{\vec{u}}$ de l'espace dans lui même qui à tout point M associe le point $M' = t_{\vec{u}}(M)$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.*

Proposition 13.1. *Si $M' = t_{\vec{u}}(M)$ et $N' = t_{\vec{u}}(N)$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.*

Proposition 13.2. *Toute translation de l'espace transforme :*

- *une droite en une droite parallèle*
- *un plan en un plan parallèle*
- *une sphère en une sphère de même rayon*
- *tout solide de l'espace en un solide de même nature*

Toute translation de l'espace conserve les aires et les volumes.

Proposition 13.3 (Expression analytique)**.** *L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}(a, b, c)$, $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ tels que $M' = t_{\vec{u}}(M)$. Alors :*

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

Remarque 13.1. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.*

13.2 Homothéties de l'espace

Définition 13.2. *Ω est un point de l'espace. Soit $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k, l'application de l'espace dans lui même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. On note $M' = h_{(\Omega,k)}(M)$.*

Proposition 13.4. *Si $M' = h_{(\Omega,k)}(M)$ et $N' = h_{(\Omega,k)}(N)$, alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.*

Proposition 13.5. *Toute homothétie de l'espace de rapport k transforme :*
- *une droite en une droite parallèle*
- *un plan en un plan parallèle*
- *une sphère de rayon R en une sphère de rayon $|k|R$.*

Toute homothétie de l'espace conserve le parallélisme, les barycentres, multiplie les distances par $|k$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Proposition 13.6 (Expression analytique)**.** *L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\Omega(a,b,c)$, $k\in\mathbb{R}^*$, $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$ tels que $M'=h_{(\Omega,k)}(M)$. Alors :*

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \\ z' = kz + (1-k)c \end{cases}$$

Proposition 13.7. *L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit p, q, r trois réels et $k\in\mathbb{R}^*$. On considère l'application f de l'espace dans lui même qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ tel que :*

$$\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \\ z' = kz + r \end{cases}$$

Alors :
- *Si $k=1$, f est la translation de vecteur $\vec{u}(p,q,r)$.*
- *Si $k‘\neq 1$, f est une homothétie de rapport k, le centre étant le point $\Omega=\left(\frac{p}{1-k},\frac{q}{1-k},\frac{r}{1-k}\right)$.*

Démonstration. Exercice. □

Proposition 13.8. *Soit h et h' deux homothéties de centre commun Ω et de rapport k et k' respectivement.*
- *Si $kk'=1$, $h\circ h'$ est une translation.*
- *Si $kk'\neq 1$, $h\circ h'$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport kk'.*

Démonstration. Exercice. □

Proposition 13.9. *Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $k\in\mathbb{R}^*$, $k\neq 1$; soit t une translation. Alors $t\circ h$ et $h\circ t$ sont des homothéties de rapport k, les centre étant les points invariants.*

Exposé 8. *Soit h_1 l'homothétie de centre O_1 et de rapport k_1, h_2 l'homothétie de centre O_2 et de rapport k_2.*

1. *On suppose $k_1k_2\neq 1$. Montrer que le centre I de l'homothétie $h_1\circ h_2$ est déterminé par la relation*

$$\overrightarrow{O_1I} = \frac{k_2-1}{1-k_1k_2}\overrightarrow{O_2O_1}.$$

2. *On suppose que $k_1k_2=1$. Montrer que le vecteur de translation de $h_1\circ h_2$ est donné par $\vec{u}=(k-1)\overrightarrow{O_1O_2}$.*

13.3 Symétrie orthogonales (ou reflexions)

Définition 13.3 (Plan médiateur)**.** *Soit A et B deux points de l'espace et I le milieu du segment $[AB]$. On appelle plan médiateur du segment $[AB]$ l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et B.*

Remarque 13.2.
1. *Toute droite du plan médiateur de $[AB]$ passant par I est une médiatrice du segment $[AB]$.*
2. *Tout plan contenant la droite $[AB]$ est perpendiculaire en I au plan médiateur de $[AB]$.*

Définition 13.4 (Réflexion)**.** *Soit (P) un plan de l'espace, on appelle réflexion de plan (P) la transformation de l'espace notée $S_{(P)}$ qui à tout point M associe le point M' tel que :*
- *$S_{(P)}(M) = M$ si $M \in (P)$*
- *(P) est le plan médiateur de $[MM']$ si $M \notin (P)$.*

$S_{(P)}$ est aussi appelé symétrie orthogonale par rapport à (P).

Remarque 13.3.
1. *(P) est l'ensemble des points fixes, c'est-à-dire, $\forall M \in (P)$, $S_{(P)}(M) = M$*
2. *$S_{(P)} \circ S_{(P)} = Id$*
3. *Si (P_2) est un plan perpendiculaire à (P) et $(\Delta) = (P) \cap (P_2)$, alors :*
   - *(P_2) est globalement invariant par $S_{(P)}$.*
   - *La restriction de $S_{(P)}$ à (P_2) est la symétrie orthogonale d'axe (Δ).*
4. *Si (D) est une droite orthogonale à (P) en un point I :*
   - *(D) est globalement invariante par $S_{(P)}$.*
   - *La restriction de $S_{(P)}$ à (D) est la symétrie de centre I.*
5. *Toute réflexion de l'espace est une isométrie.*

Proposition 13.10.
1. *Toute réflexion de l'espace transforme les droites (respectivement les plans) en droites (respectivement en plans) en conservant parallélisme et orthogonalité.*
2. *L'image d'une figure plane par une réflexion est une figure de même nature et de mêmes dimensions*
3. *L'image d'un solide de l'espace par une réflexion est un solide de même nature et de mêmes dimensions.*
4. *Une réflexion de l'espace conserve les aires planes et les volumes.*

Proposition 13.11 (Expression analytique)**.** *Soit (P) un plan perpendiculaire à $(O, \vec{k})$, son équation est alors de la forme $z = c$. Soit $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ tels que $M' = S_{(P)}(M)$. On a*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z + 2c \end{cases}$$

Démonstration. On a $(MM') \perp (P)$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{k}$. On en déduit que $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + \lambda \end{cases}$.

Soit I la milieu du segment $[MM']$, on a $I \in (P)$ donc $\frac{z+z'}{2} = c$ on en déduit $z' = -z + 2c$. □

Exercice 13.1. *Etablir une expression analogue lorsque (P) est perpendiculaire à $(O, \vec{\imath})$, puis à $(O, \vec{\jmath})$.*

Exposé 9. *Soit un plan (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c non tous nuls. Montrer que l'expression analytique de $(S_{(P)})$ est donnée par :*

$$\begin{cases} x' = x + \lambda a \\ y' = y + \lambda b \\ z' = z + \lambda c \end{cases}, \text{ avec } \lambda = \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}[d - ax - by - cz]$$

Ind : on utilisera le fait que le milieu du segment $[MM']$ est sur (P) et que $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur normal de (P).

Proposition 13.12.
1. *La composée de deux réflexions de plans parallèles est une translation de vecteur normal à ces deux plans.*
2. *Toute translation de vecteur non nul est la composée de deux réflexions de plans parallèles admettant le vecteur de la translation pour vecteur normal.*

Démonstration. Evidente. □

13.4 Demi-tours ou symétrie par rapport à une droite de l'espace

Définition 13.5. *Soit (Δ) une droite de l'espace, on appelle demi-tour d'axe (Δ) et on note $S_{(\Delta)}$ la transformation du plan qui à tout point M associe un point $M' = S_{(\Delta)}(M)$ tel que :*
- *si $M \in (\Delta)$, alors $M = M'$,*
- *si $M \notin (\Delta)$, alors (Δ) est une médiatrice du segment $[MM']$.*

Remarque 13.4.
- *(Δ) est l'ensemble des points fixes par $S_{(\Delta)}$.*
- *Si I est le projeté orthogonal de M sur (Δ) et si $M' = S_{(\Delta)}(M)$, alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$.*
- *Si $M' = S_{(\Delta)}(M)$, alors $M = S_{(\Delta)}(M')$ donc $S_{(\Delta)} = S^{-1}_{(\Delta)}$, on dit que $S_{(\Delta)}$ est involutive.*

Proposition 13.13.
1. *Soit (Δ) une droite de l'espace, $S_{(\Delta)}$ le demi-tours d'axe (Δ), (P) un plan orthogonal à (Δ) en I.*
   (a) *(P) est globalement invariant par $S_{(\Delta)}$.*
   (b) *La restriction de $S_{(\Delta)}$ à (P) est la symétrie de centre I.*
2. (a) *La composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant une droite (Δ) est le demi-tour d'axe (Δ).*
   (b) *Tout demi-tours d'axe (Δ) est la composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivants la droite (Δ).*

Proposition 13.14 (Expression analytique)**.** *Si (Δ) est une droite parallèle à $(O, \vec{k})$, alors, son équation est de la forme $(\Delta) : x = a;\ y = b$. L'expression analytique de $S_{(\Delta)}$ est donnée par :*

$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \\ z' = z \end{cases}$$

Exercice 13.2. *Prouver la proposition ci-dessus.*

Exposé 10. *On suppose que l'équation paramétrique de* (Δ) *est*

$$\begin{cases} x = \alpha + \lambda a \\ y = \beta + \lambda b \\ z = \gamma + \lambda c \end{cases}$$

Déterminer l'expression analytique de $S_{(\Delta)}$.

Proposition 13.15. *La composée de deux demi-tours d'axes parallèles est une translation de vecteur orthogonal à ces deux droites. Réciproquement, toute translation de vecteur non nul est la composée de deux demi-tours d'axes parallèles dont un vecteur orthogonal est le vecteur de la translation.*

Proposition 13.16. *La composée de deux demi-tours d'axes* (Δ_1) *et* (Δ_2) *perpendiculaires en un point* A *est le demi-tours dont l'axe* (Δ) *est perpendiculaire commune à* (Δ_1) *et* (Δ_2) *en* A. *Réciproquement, tout demi-tours de l'espace est la composée de deux demi-tours d'axes perpendiculaires.*

13.5 Rotations de l'espace

Cette section est un complément et ne saurait faire l'objet d'un devoir.

Définition 13.6. *Soit* (Δ) *une droite de l'espace orienté par le choix d'un vecteur unitaire* $\vec{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *On appelle rotation de l'espace d'axe* (Δ) *et d'angle* α *la transformation* $r : (\mathcal{E}) \to (\mathcal{E})$, $M \mapsto M' = r(M)$ *tel que*

Chapitre 14

Géométrie vectorielle

Le chapitre comporte essentiellement deux grandes parties :
– les isomorphismes d'espaces vectoriels
– les formes linéaires et applications.
En partant de ce qui a été fait en classe de première, on fera des ouvertures sur des applications linéaires d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F ; les dimensions de E et F ne dépassant pas 3. Le transport des structures est d'une utilité certaine pour résoudre divers problèmes mathématiques. L'on pourra donc introduire des connaissances à ce sujet.

Le chapitre commence par un rappel sur les notions d'espace vectoriels, de sous-espaces vectoriels

14.1 Rappels sur les espaces vectoriels

14.2

Chapitre 15

Trigonométrie hyperbolique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 15.1. *On appelle cosinus hyperbolique et on note* cosh *ou ch la fonction définit de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Définition 15.2. *On appelle sinus hyperbolique et on note* sinh *ou sh la fonction définit de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On vérifie aisément que cosh est paire et que sinh est impaire.

Proposition 15.1. *On a les relations suivantes.*

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \textit{et} \quad \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1.$$

Proposition 15.2. *Les fonction* cosh *et* sinh *sont dérivables et on a :*

$$\cosh' x = \sinh x \quad \textit{et} \quad \sinh' x = \cosh x.$$