Première année

TOPOLOGIE USUELLE DE $\mathbb{R}$.

Patrick NJIONOU, S
iEARN Master Teacher
pnjionou@yahoo.fr
www.easy-maths.org

On entendra par topologie d'un ensemble la structure de cet ensemble. La topologie est une notion fondamentale en analyse et même en méthématiques en général. Beaucoup d'autres notions sont liées à elle, on citera par exemple les notions de continuité, de convergence,..., c'est donc une notion à très bien comprendre.

1 Voisinage d'un point dans $\mathbb{R}$

1.1 Boule ouverte, boule fermée

Définition 1. *Soit a un réel et r un réel strictement positif.*

1. *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble noté $B(a,r)$ défini par :*
$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} / \ |x-a| < r\} =]a-r, a+r[$$
2. *On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble noté $\overline{B}(a,r)$ et défini par :*
$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} / \ |x-a| \leq r\} = [a-r, a+r]$$

Proposition 1. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $r_1, r_2 > 0$.*

1. $B(a,r_1) \cap B(a,r_2) = B(a,r)$ *avec* $r = \min\{r_1, r_2\}$
2. $\overline{B}(a,r_1) \cap \overline{B}(a,r_2) = B(a,r)$ *avec* $r = \min\{r_1, r_2\}$
3. $B(a,r_1) \cup B(a,r_2) = B(a,r)$ *avec* $r = \max\{r_1, r_2\}$
4. $\overline{B}(a,r_1) \cap \overline{B}(a,r_2) = B(a,r)$ *avec* $r = \max\{r_1, r_2\}$

Démonstration. On remarquera que si $r_1 < r_2$ alors $B(a,r_1) \subset B(a,r_2)$. □

Proposition 2. *Soit a un réel et $r > 0$. Pour tout $y \in B(a,r)$, il existe toutjous une boule de centre y contenue dans $B(a,r)$.*

Démonstration. Soit a un réel et $r > 0$. Soit $y \in B(a,r)$, trouvons $\rho > 0$ tel que $B(y,\rho) \subset B(x,a)$.
Posons $\theta = \min\{a + r - y, y - (a - r)\}$. Nous allons montrer que $B(y,\theta \subset B(a,r)$.

- Si $y = a$ alors $\theta = r$ et $B(y,\theta) = B(a,r)$.
- Si $y < a$ alors $\theta = y-(a-r)$ et on a $a-r < y-\theta < y < y+\theta < a+r$ donc $B(y,\theta) \subset B(x,a)$
- Si $y > a$ alors $\theta = a + r - y$, ainsi $a - r < y-\theta < y < y+\theta < a+r$ donc $B(y,\theta) \subset B(x,a)$

□

1.2 Voisinages

Définition 2 (Voisinage de a)**.** *Soit V une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de a s'il existe une boule ouverte de centre a et qui est contenue dans V. De façon précise, V est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset V$.*
On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Proposition 3.

1. $\mathcal{V}(a) \neq \varnothing$
2. $\forall V \in \mathcal{V}(a), a \in V$
3. $\forall U, V \in \mathcal{V}(a), U \cap V \in \mathcal{V}(a)$
4. $\forall U \in \mathcal{V}(a), \forall V \subset \mathbb{R}, U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(a)$
5. $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ *et* $\forall b \in U,\ U \in \mathcal{V}(b)$.

Démonstration.

1. $\mathcal{V}(a) \neq \varnothing$ car $B(a, \frac{1}{2}) \in \mathcal{V}(a)$.
2. Soit $V \in \mathcal{V}(a)$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset V$, comme $a \in B(a,r)$ alors $a \in V$.
3. Soit $U, V \in \mathcal{V}(a)$, alors il existe $r_1, r_2 >$ tels que $B(a,r_1) \subset U$ et $B(a,r_2) \subset V$. Posons $r = \min\{r_1, r_2\}$. On $B(a,r) = B(a,r_1) \cap B(a,r_2) \subset U \cap V$, donc $U \cap V \in \mathcal{V}(a)$.
4. Soit $U \in \mathcal{V}(a)$ et $V \subset \mathbb{R}$ tel que $U \subset V$. On sait qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$, comme $U \subset V$, alors $B(a,r) \subset V$ donc $V \in \mathcal{V}(a)$.
5. Il suffit de prendre une boule contenue dans V puis utiliser la proposition 2.

□

Proposition 4. *Soient a et b deux réels distincts, il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ et $V \in \mathcal{V}(b)$ tels que $U \cap V = \varnothing$. On dit dans que $\mathbb{R}$ est séparé.*

Démonstration. Poser $r = \frac{|a-b|}{3}$ et predre $U = B(a,r)$, $V = B(b,r)$. □

Proposition 5. *Si A est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et si $x \in A$ alors A est un voisinage de x. De façon précise, tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est voisinage de chacun de ces points.*

Démonstration. Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Posons $a_0 = a + \frac{b-a}{2}$ et $r = \frac{b-a}{2}$. Alors $]a,b[= B(a_0,r)$. Conclure avec la proposition 2. □

2 Point d'accumulation d'un ensemble, ensemble dérivé

Notation 1. *Si $a \in \mathbb{R}$, et $r > 0$, alors $B^*(a,r) = B(a,r)\setminus\{a\} =]a-r,a[\cup]a,a+r[$.*

Définition 3. *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que x est un point d'accumulation de A si :*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ A \cap [V\setminus\{x\}] \neq \emptyset$$

2. *L'ensemble dérivé de A noté A' est l'ensemble des points d'accumulation de A.*

Proposition 6. *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *x est un point d'accumulation de A.*
2. *$\forall r >,\ B^*(a,r) \cap A \neq \emptyset$.*

Démonstration.
- Supposons que $x \in A'$. Soit $r > 0$, alors $B(x,r) \in \mathcal{V}(x)$ donc $A \cap [B(x,r)\setminus\{x\}] \neq \emptyset$ donc $A \cap B^*(x,r) \neq \emptyset$.
- Réciproquement, supposons que pour tout $r > 0$, $A \cap B^*(x,r) \neq \emptyset$. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, il s'agit de montrer que $A \cap [V\setminus\{x\}] \neq \emptyset$. Comme $v \in \mathcal{V}(x)$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$, comme $B^*(x,r) \cap V \neq \emptyset$ et que $B^*(x,r) \subset A \cap [V\setminus\{x\}]$, alors $A \cap [V\setminus\{x\}] \neq \emptyset$.

□

Remarque 1. *Il sera souvent plus facile d'utiliser cette proposition pour montrer qu'un élément d'un ensemble est point d'accumulation.*

Proposition 7. *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$x \in A'$.*
2. *$\forall r > 0$, $B^*(x,r) \cap A$ est infinie.*

Démonstration.
- Si pour tout $r > 0$, $B^*(x,r) \cap A$ est infinie, alors pour tout $r > 0$ $B^*(x,r) \cap A \neq \emptyset$ donc $x \in A'$.

– Supposons maintenant que $x \in A'$. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $B^*(x,r) \cap A$ soit finie. Comme $x \in A'$, on a $B^*(x,r) \cap A \neq \varnothing$, posons alors $B^*(x,r) \cap A = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$. Il est clair que pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $x_i \neq x$. $\mathbb{R}$ étant séparé, il existe $\varepsilon_i > 0$, $r_i > 0$ tel que $B(x,\varepsilon_i) \cap B(x_i, r_i) = \varnothing$, ce qui entraîne que $B^*(x,\varepsilon_i) \cap B^*(x_i, r_i) = \varnothing$ d'où $x_i \notin B^*(x,\varepsilon_i)$ pout tout i. Posons alors $\theta = \min\{\varepsilon_i,\ 1 \le i \le p\}$. On a $B^*(x,\theta) \subset B^*(x,\varepsilon_i)$ pour tout i. Posons ensuite $\gamma = \min\{\theta, r\}$.

$$\begin{aligned} \gamma \le r &= B^*(x,\gamma) \subset B^*(x,r) \\ &= B^*(x,\gamma) \cap A \subset B^*(x,r) \cap A \\ &= B^*(x,\gamma) \cap A \subset \{x_1, x_2, ..., x_p\} \end{aligned}$$

De plus $\gamma \le \theta \Rightarrow B^*(x,\gamma) \subset B^*(x,\theta)$. Mais :

$$\begin{aligned} \forall\, i \in \{1, 2, ..., p\}\ x_i \notin B^*(x,\varepsilon_i) &\Rightarrow x_i \notin B^*(x,\theta) \\ &\Rightarrow x_i \notin B^*(x,\gamma) \\ &\Rightarrow x_i \notin B^*(x,\gamma) \cap A \end{aligned}$$

Par conséquent $B^*(x,\gamma) \cap A = \varnothing$. Ce qui contredit le fait que $x \in A'$.

□

Corollaire 1. *1. Si A est une partie finie de $\mathbb{R}$, A n'admet pas de point d'accumulation.*

2. $\mathbb{Z}$ n'admet pas de point d'accumulation.

Proposition 8. *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $x \in A'$,
2. *Il existe une suite $(a_n)_n$ de point distinct de A qui convergent vers x, de façon précise, il existe une suite $(a_n)_n$ vérifiant :*
   (a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$
   (b) $\forall\, n, p \in \mathbb{N}$, $n \neq p \Rightarrow a_n \neq a_p$.
   (c) (a_n) *converge vers* x.

Démonstration. – Supposons que $x \in A'$, alors pour tout $r > 0$, $B^*(x,r) \cap A$ est infinie.
Pour $r = 1$, considérons $a_0 \in B^*(x,1) \cap A$
Pour $r = \frac{1}{2}$, $B^*(x,\frac{1}{2}) \cap A$ est infinie, considérons $a_1 \in B^*(x,\frac{1}{2}) \cap A$ tel que $a_0 \neq a_1$.
Supposons construits $(a_i)_{0 \le i \le n}$ et construisons a_{n+1} de la façon suivante :
pour $r = \frac{1}{2^{n+1}}$, $B^*(x,\frac{1}{2^{n+1}}) \cap A$ est infinie. Choisissons $a_{n+1} \in B^*(x,\frac{1}{2^{n+1}}) \cap A$ tel que $a_{n+1} \notin \{a_0, a_1, ..., a_n\}$.
La suite (a_n) vérifie :

i $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in A$
ii $\forall n, p \in,\ n \neq p \Rightarrow a_n \neq a_p$.
iii $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in B^*(x, \frac{1}{2^n}) \cap A$ donc $|a_n - x| < \frac{1}{2^n}$ d'où $\lim |a_n - x| = 0$ et par suite $\lim a_n = x$.

– Supposons à présent qu'il existe une suite vérifiant (a), (b) (c) et montrons que $x \in A'$.
Soit $r > 0$. Comme $\lim a_n = x$, il existe $n_r \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_r \Rightarrow |a_n - r| < r \Rightarrow a_n \in B(a, r)$ Posons $p = n_r + 1$ et $q = n_r + 2$. Alors $p, q > n_r$ donc $a_p, a_q \in B(x, r) \cap A$. Comme $a_p \neq a_q$, $a_p = x \Rightarrow a_q \neq x$ et $a_q = x \Rightarrow a_p \neq x$, donc $\{a_p, a_q\} \cap [B^*(x, r) \cap A] \neq \varnothing$.

□

Proposition 9. *Soit $A, B \subset \mathbb{R}$.*

1. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
2. $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$
4. $(A')' \subset A'$.

Démonstration. 1. Soit $A \subset B$. Soit $x \in A'$, il existe une suite (a_n) de points distincts de A qui converge vers x. Il est clair que (a_n) est une suite de points distincts de B (car $A \subset B$) qui converge vers x donc $x \in B'$

2. Remarquons que $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc $(A \cap B)' \subset A'$ et $(A \cap B)' \subset B'$ d'où $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$.

3. On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc $A' \subset (A \cup B)'$ et $B' \subset (A \cup B)'$ d'où $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.
Supposons qu'il existe $x \in (A \cup B)'$ tel que $x \notin A' \cup B'$ et montrons que c'est impossible.

$$\begin{aligned} x \notin A' \cup B' &\Leftrightarrow x \notin A' \text{ et } x \notin B' \\ &\Leftrightarrow \exists r_1, r_2 > 0 / B^*(x, r_1) \cap A = \varnothing \text{ et } B^*(x, r_2) \cap B = \varnothing \end{aligned}$$

Posons $\theta = \min\{r_1, r_2\}$, alors on a : $B^*(x, \theta) \subset B^*(x, r_1)$ et $B^*(x, \theta) \subset B^*(x, r_2)$ donc $B^*(x, \theta) \cap A = \varnothing$ et $B^*(x, \theta) \cap B = \varnothing$ d'où $B^*(x, \theta) \cap (A \cup B) = \varnothing$. D'où $x \notin (A \cup B)'$ ce qui est absurde.

4. Supposons qu 'il existe $x \in A"$ tel que $x \notin A'$.
$x \notin A'$ donc il existe $\theta > 0$ tel que $B^*(x, \theta) \cap A = \varnothing$
$x \in A" \Leftrightarrow \forall R > 0,\ B^*(x, R) \cap A' \neq \varnothing$, en particulier pour $R = \theta$, on a $B^*(x, \theta) \cap A' \neq \varnothing$. Comme $A' \subset A$, on a donc $B^*(x, \theta) \cap A \neq \varnothing$, ce qui est impossible donc $A" \subset A'$.

□

Théorème 1 (Bolzano-Weirstrass)**.** *Toute partie infinie et bornée de* $\mathbb{R}$ *admet un point d'accumultation.*

Démonstration. Comme A est borné, il existe a_0 et b_0 tel que $A \subset [a_0, b_0]$. Posons $S_0 = [a_0, b_0]$, $K_1 = \left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$, $T_1 = \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$.
$S_0 \cap A = A$ donc $S_0 \cap A$ est infini. Comme $S_0 = K_1 \cup T_1$, alors $(K_1 \cup T_1) \cap A$ est infini, ainsi $(K_1 \cap A) \cup (T_1 \cap A)$ est infini. Si $K_1 \cap A$ est infini, on pose $S_1 = K_1 = [a_1, b_1]$ et on prend $x_1 \in K_1 \cap A$, sinon, $T_1 \cap A$ est infini et dans ce cas on pose $S_1 = T_1 = [a_1, b_1]$ et on prend $x_1 \in T_1 \cap A$. On a alors :

1. $S_1 \subset S_0$
2. $d(S_1) = \frac{d(S_0)}{2}$
3. $S_1 \cap A$ est infini
4. $x_1 \in S_1 \cap A$ donc $S_1 \cap A \neq \varnothing$.

Posons $S_1 = [a_1, b_1]$, $K_2 = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $T_2 = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$.
$S_1 \cap A = A$ donc $S_1 \cap A$ est infini. Comme $S_1 = K_2 \cup T_2$, alors $(K_2 \cup T_2) \cap A$ est infini, ainsi $(K_2 \cap A) \cup (T_2 \cap A)$ est infini. Si $K_2 \cap A$ est infini, on pose $S_2 = K_1 = [a_2, b_2]$ et on prend $x_2 \in K_2 \cap A$ tel que $x_2 \neq x_1$, sinon, $T_2 \cap A$ est infini et dans ce cas on pose $S_2 = T_2 = [a_2, b_2]$ et on prend $x_2 \in T_2 \cap A$ tel que $x_2 \neq x_1$. On a alors :

1. $S_2 \subset S_1$
2. $d(S_2) = \frac{d(S_1)}{2}$
3. $S_2 \cap A$ est infini
4. $x_2 \in S_1 \cap A$ et $x_2 \neq x_1$.

On obtient ainsi par récurrence deux suites (S_n) et (x_n) vérifiant :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\, S_{n+1} \subset S_n$
2. $d(S_{n+1}) = \frac{d(S_n)}{2}$ pour tout n.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est un segement.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \cap A$ est infini
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in S_n \cap A$
6. $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $n \neq p \Rightarrow x_n \neq x_p$.

On obtient les résultat suivants :

Résultat 1. $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n \neq \varnothing$

d'après 1.,3. et l'axiome de continuité.

Résultat 2. $\exists \mu \in \mathbb{R} / \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n = \{\mu\}$

d'après le résultat 1 et le point 2. car $\lim d(S_n) = 0$

Résultat 3. *(u_n) converge vers μ.*

En effet, $x_n \in S_n$, $\mu \in S_n$ donc pour tout n, $|x_n - \mu| \leq d(S_n) \to 0$. □

Résultat 4. $\mu \in A'$

d'après 3.,5.,6.. Conclusion $A' \neq \varnothing$

Corollaire 2 (théorème Bolzano-Weirstrass)**.** *De toute suite bornée de $\mathbb{R}$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

3 Point adhérent, adhérence, fermé

Définition 4. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$*

1. *x est un point adhérent de A si $\forall R > 0$, $B(x,R) \cap A \neq \varnothing$.*
2. *L'adhérence de A noté $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents de A.*
3. *A est fermé si $A = \overline{A}$.*

Proposition 10. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ alors $\overline{A} = A \cup A'$.*

Démonstration. 1. Il est déjà clair par définition que $A \cup A' \subset \overline{A}$.

2. Soit $x \in \overline{A}$, et $x \notin A$, montrons que $x \in A'$.
   Comme $x \in \overline{A}$, pour tout $R > 0$, $B(x,R) \cap A \neq \varnothing$, comme $x \notin A$, pour tout $R > 0$, $x \notin B(x,R) \cap A$, ainsi, pour tout $R > 0$ il existe $y \in B(x,R) \cap A$ tel que $x \neq y$, et par suite $\forall R > 0$, $B^*(x,R) \cap A \neq \varnothing$ d'où $x \in A'$.

□

Proposition 11. *Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \varnothing$$

Démonstration. Découle du fait que tout voisinage de x contient une boule centrée en x. □

Proposition 12. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$x \in \overline{A}$*
2. *Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.*

Démonstration.
- Supposons que $x \in \overline{A}$ et construisons une suite de points de A qui converge vers x.
  Comme $x \in \overline{A}$ pour tout $R > 0$, $B(x, R) \cap A \neq \emptyset$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A \neq \emptyset$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$, évidemment la suite (a_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers x (car en effet $|a_n - x| < \frac{1}{n+1} \to 0$.
- Réciproquement, supposons qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x. Montrons que $x \in \overline{A}$.
  Soit $R > 0$, comme (a_n) converge vers x, il existe $N_R \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{R}$, $n > N_R \Rightarrow |u_n - x| < R$. Posons $k = N_R + 1$. Alors $k > N_R$ donc $|a_k - x| < R$, d'où $a_k \in B(x, R)$, mais $a_k \in A$, donc $a_k \in B(x, R) \cap A$ et par conséquent, $B(x, R) \cap A \neq \emptyset$, ainsi $x \in \overline{A}$.

□

Proposition 13. *Soit $A, B \subset \mathbb{R}$,*

1. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Démonstration. Utiliser les propriétés des ensembles dérivés. □

4 Point intérieur-Intérieur-Ouvert

Définition 5. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.*

1. *x est un point intérieur de A si $\exists R > 0$, $B(x, R) \subset A$.*
2. *On appelle intérieur de A l'ensemble noté $\overset{\circ}{A}$ des points intérieurs de A.*
3. *A est un ouvert de $\mathbb{R}$ si $A = \overset{\circ}{A}$*

Proposition 14. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x. Alors $x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(x)$*

Démonstration. Si $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe $R >$ tel que $B(x, R) \subset A$, d'où $A \in \mathcal{V}(x)$. Réciproquement, supposons que $A \in \mathcal{V}(x)$, alors pour les mêmes raisons, $x \in \overset{\circ}{A}$. □

Remarque 2. *Par définition $\overset{\circ}{A} \subset A$ donc $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ signifie que A est infinie, plus précisément que A contient un intervalle.*

Proposition 15. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, alors on a :*

1. $\overline{[\overset{\circ}{A}]} = \overline{A^c}$
2. $\overset{\circ}{A} = [A^c]^c$
3. $\overline{A} = [\overset{\circ}{A^c}]^c$.

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned} x \notin \overset{\circ}{A} &\Leftrightarrow \forall R > 0,\ B(x,R) \cap A^c \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A^c} \end{aligned}$$

2. S'obtient en passant au complémentaire dans 1..
3. S'obtient en applicant 1. avec $B = \overset{\circ}{A}$.

□

Proposition 16. *Soit A et B* $\subset \mathbb{R}$.

1. $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
2. $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
3. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$
4. $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$.

Démonstration. Utiliser la proposition 15. □

Proposition 17. *Soit A une partie de* $\mathbb{R}$*, A est ouvert si et seulement si* A^c *est fermé.*

Démonstration. Découle de la proposition 15. □

5 Compacts, ensembles compacts de $\mathbb{R}$

Définition 6 (Recouvrement)**.** *Soit* $B \subset \mathbb{R}$ *et* $\mathscr{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ *une famille de parties de* $\mathbb{R}$.

1. $\mathscr{A}$ *est un recouvrement de B si* $B \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Omega} A_\lambda$.
2. $\mathbb{A}$ *est un recouvrement de B par les intervalles ouverts si :*
   (a) $\mathscr{A}$ *est un recouverment de B*
   (b) $\forall \lambda \in \Omega$, A_λ *est un interalle ouvert.*

Définition 7. *Soit* $A \subset \mathbb{R}$. *A est un compact de* $\mathbb{R}$ *si de tout recouverment de A par des intervalles ouverts, on peut extraire un sous recouverment fini de A, plus précisément si pour toute famille* $\mathscr{F} = (I_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ *vérifiant :*

– $\forall \lambda \in \Omega$, I_λ *est un intervalle ouvert.*
– $A \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Omega} I_\lambda$

il existe $K = \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *tel que :*
– $K \subset \Omega$
– $A \subset \bigcup\limits_{\lambda \in K} I_\lambda$

Théorème 2 (Borel Lebesgue)**.** *Soit* $A \subset \mathbb{R}$*, les deux propositionss uivantes sont équivalentes :*

1. *A est compact,*
2. *A est fermé et borné.*

Démonstration. Admis. □

Théorème 3 (Bolzano Weirstrass)**.** *Soit* $A \subset \mathbb{R}$*. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est compact,*
2. *toute partie infinie de A admet un point d'accumulation dans A.*

Démonstration. Admis □

Corollaire 3. *Soit A un compact non vide, alors toute partie infinie de A admet un point d'accumulation.*

Démonstration. Découle du théorème de Bolzano Weirstrass et du fait que tout compact est borné. □

6 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 8. *On adjoint à* $\mathbb{R}$ *deux éléments distincts* $+\infty$ *et* $-\infty$ *et qui n'appartiennent pas à* $\mathbb{R}$*, on prolonge ainsi* $\mathbb{R}$ *à* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

6.1 Opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$

6.1.1 Addition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, alors on a le tableau d'addition suivant :

$+$	a	$+\infty$	$-\infty$
b	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	undifined
$-\infty$	$-\infty$	undefined	$-\infty$

6.1.2 Multiplication

$$\begin{cases} -\infty \times -\infty = +\infty \\ -\infty \times +\infty = -\infty \\ +\infty \times -\infty = -\infty \\ +\infty \times +\infty = +\infty \end{cases}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$:
Si a est strictement positif, alors :

$$\begin{cases} a \times +\infty = +\infty \times a = +\infty \\ a \times -\infty = -\infty \times a = -\infty \end{cases}$$

Si a est strictement négatif, alors :

$$\begin{cases} a \times +\infty = +\infty \times a = -\infty \\ a \times -\infty = -\infty \times a = +\infty \end{cases}$$

Si $a = 0$, le produit avec l'un des éléments $+\infty$ et $-\infty$ n'est pas défini.

On pose : $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{-\infty} = 0$.

6.2 Relation d'ordre dans $\overline{\mathbb{R}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.
On a aussi $-\infty \leq -\infty$ et $+\infty \leq +\infty$.

Proposition 18. *Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.*

6.3 Notion de voisinage dans $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. $A \in \mathcal{V}(x_0) \Leftrightarrow \exists R > 0/\ B(x, R) \subset A$.
2. $A \in \mathcal{V}(+\infty) \Leftrightarrow \exists R > 0/\ ]R, +\infty[\subset A$.
3. $A \in \mathcal{V}(-\infty) \Leftrightarrow \exists R < 0/\ ]-\infty, R[\subset A$.

Proposition 19.
1. *$\overline{\mathbb{R}}$ est séparé.*
2. *Pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R} \in \mathcal{V}(x)$*
3. *L'intersection de deux voisinages d'un point est encore un voisinage de ce point.*
4. *Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant un voisinage de x est encore un voisinage de x.*
5. *Tout voisinage d'un point x contient un ouvert contenant x.*