Ministère des Enseignements Secondaires
LYCÉE DE MAROUA KONGOLA
B.P. 329 MAROUA
Département de **Mathématiques**

ANNÉE SCOLAIRE 2009/2010
Classe : $1^{\text{ère}}$C
Coef : 6 ; Durée : 3 h
Prof : M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°2 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / NOVEMBRE 2009

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4points]

ABC est un triangle. I, J et K sont trois points définis par :

$$\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IC};\ \overrightarrow{JA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{JC};\ \overrightarrow{KB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{KA}.$$

1. Faire une figure. 0.5 pt
2. Justifier que : I est le barycentre de $(B,\ 2)$ et $(C,\ 1)$; J est le barycentre de $(A,\ 3)$ et $(C,\ 2)$; K est le barycentre de $(B,\ 4)$ et $(A,\ 3)$. 0.25pt×3
3. a. Justifier qu'il existe le point G, barycentre des points $(A,\ 3)$, $(B,\ 4)$ et $(C,\ 2)$. 0.25 pt

   b. Démontrer que les points suivants sont alignés : 0.5pt×3
      i. G, A, I
      ii. G, B, J
      iii. G, C, K.

   c. En déduire que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes. 0.5 pt
   Construire le point G, justifier la réponse. 0.5 pt

Exercice 2 [5points]

1. Écrire les expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:
   $A(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin(\pi - x)$ 0.5pt
   $B(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2 x$ 0.5pt
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ en remarquant que $\frac{\pi}{6} = 2\times\frac{\pi}{12}$ 0.5pt×2
3. On se propose de résoudre l'équation trigonométrique

$$(E) : \cos(x + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2}.$$

   a. Montrer que $\cos(x + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}\sin(x + \frac{\pi}{6}) = A\sin(x + B)$ où A et B sont deux nombres réels à déterminer. 1pt

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E). 1pt

   c. Résoudre dans $[0,\ 2\pi]$ l'inéquation $\cos(x + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}\sin(x + \frac{\pi}{6}) \leqslant \sqrt{2}$. 1pt

Problème [11points]

Partie A :

I- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On considère la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $(\mathscr{D})$: $2x+3y-1=0$ et le point $A(1,\ 1)$.

1. Déterminer l'équation normale de $(\mathscr{D})$. 0.25pt
2. Calculer la distance de A à $(\mathscr{D})$. 0.5pt
3. Déterminer une représentation paramétrique du cercle centré en A et tangent à $(\mathscr{D})$. 1pt

II- Soit le polynôme $P(x)=2x^3-x^2-5x-2$

1. Calculer $P(-1)$; en déduire une factorisation de $P(x)$. 1pt
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$ 0.5pt
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\sin^3 x-\sin^2 x-5\sin x-2=0$ 1.5pt
4. Placer les solutions de la question 3. sur le cercle trigonométrique 1pt

Partie B :

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm. D est le point du plan tel que :

$3\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

1. Démontrer que D est barycentre des points A, B, C affectés des coefficients que l'on déterminera. 1pt
2. I étant le milieu du segment $[AC]$.
   a. Démontrer que D est le barycentre des points B et I affectés des coefficients que l'on déterminera. 0,5pt
   b. En déduire que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$ 0,5pt
3. a. Calculer ID, AD et BD. 0.5×3pt
   b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MC}^2=16$. 1pt
   c. Vérifier que le centre de gravité O du triangle ABC appartient à $\mathscr{E}$ 0.25pt
4. Représenter $\mathscr{E}$ 0.5pt

« Si l'esprit d'un homme s'égare, faites lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. » Francis Bacon