UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE SUPERIEURE DE YAOUNDE
Concours d'entrée en première année du second cycle : Session de 2002
Filière : Mathématiques
Epreuves d'Algèbre et Analyse Durée : 3heures.

EXERCICE 1 :

1. Soit $A = \{n \in \mathbb{N} : n < 10\}$ et $E = \mathscr{P}(A) \setminus \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$. On considère l'ensemble ordonné $\langle E, \subseteq \rangle$ et $B = \{x \in E ; \{0,1,2\} \subsetneq x \subsetneq \{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$.
   (a) Déterminer les éléments minimaux et les éléments maximaux de $\langle B, \subseteq \rangle$
   (b) Déterminer les bornes inférieures de B.
2. On note P_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble fini à n éléments. $E = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est un ensemble ayant $n+1$ éléments. Soient x, y deux éléments distincts de $E \setminus \{x_0\}$. On désigne par $F_{x,y}$ l'ensemble des partitions de E dont $\{x_0, x, y\}$ est élément et par K l'ensemble des partitions de $E \setminus \{x_0, x, y\}$.
   (a) Montrer que
   $$\begin{array}{rccl} \varphi : & K & \rightarrow & F_{x,y} \\ & X & \mapsto & \varphi(X) = X \cup \{\{x_0, x, y\}\} \end{array}$$
   est une bijection.
   (b) Déduire le nombre de relations d'équivalence sur E telles que $classe(x_0)$ ait trois éléments.
3. On admet que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P_k$, où $P_0 = 1$. Déterminer le nombre de relations d'équivalence sur l'ensemble $E = \{0,1,2,3,4,5\}$ telles que :
   (a) $classe(1)$ ait deux éléments et $classe(4)$ ait deux éléments.
   (b) $classe(1)$ ait au plus trois éléments et $classe(4)$ ait au moins trois éléments.

EXERCICE 2 :

Soit $\varphi : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} e^{-tx} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 \quad \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On pose $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x,t)\,dt$.

2. Montrer que Φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $|\Psi(x)| \leq \dfrac{1}{x}$ et déterminer $\Psi(x)$ en fonction de x.

EXERCICE 3 :

1. Soit $(G, .)$ un groupe et H un sous-groupe de G. On suppose qu'il existe un élément $x \in G$ tel que $G = H \cup (xH)$.
   (a) Montrer que $x \notin H$ et que $xH = Hx$.
   (b) Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.

(c) Déterminer le groupe quotient G/H.

2. Si G est un groupe, on désigne par $S(G)$ l'ensemble des permutations de G (bijections de G dans G), par H l'ensemble des translations à gauche de G ($\gamma_a : G \to G$, $x \mapsto ax$) et par Δ l'ensemble des automorphismes intérieurs Φ_a de G ($\Phi_a : G \to G$, $x \mapsto axa^{-1}$.
   (a) Montrer qu'un sous-groupe K de G est distingué si et seulement si $\forall a \in G$, $\Phi_a(K) = K$.
   (b) Montrer que H et Δ sont des sous-groupes de $S(G)$ et que $H\Delta = \Delta H$ où $H\Delta = \{f \circ g;\ f \in H \text{ et } g \in \Delta\}$.
   (c) En déduire que $\Omega = H\Delta$ est une sous-groupe de $S(G)$.
   (d) Montrer que $H \cap \Delta = \{I\}$.
   (e) Montrer que H est un sous-groupe distingué de Ω.