UNIVERSITE DE YAOUNDE I

ECOLE NORMALE SUPERIEURE SUPERIEURE DE YAOUNDE

Concours d'entrée en première année du second cycle : Session d'Août 2009

Filière : Mathématiques

Epreuves de Géométrie (majeure) Durée : 3heures.

Dans toute l'épreuve, E_n est un espace affine euclidien de dimension n et de direction E_n. MN désigne la distance euclidienne $d_n(M,N)$ de deux points M, N de $\mathscr{E}_n$.

EXERCICE 1 :

1. Soient A, B deux points. Montrer qu'un point M appartient au segment $[AB]$ si et seulement si $AM + MB = AB$;
2. Soit $f : \mathscr{E}_n \to \mathscr{E}_p$ une isométrie c'est-à-dire : $d_p(f(M), f(N)) = d_n(M,N)$ pour tous $M, N \in \mathscr{E}_n$. Déduire de ce qui précède que :
   (a) f transforme les points alignés en points alignés.
   (b) f transforme le barycentre des points pondérés (A,t), $(B,1-t)$ en le barycentre des points pondérés $(f(A),t)$, $(f(B),1-t)$, pour tout réel t et tous points A, B de $\mathscr{E}_n$.
   (c) f est une application affine.
3. Démontrer que les isométries affines de $\mathscr{E}_n$ sont les seules transformations isométriques de $\mathscr{E}_n$ dans lui-même.

EXERCICE 2 :

I- Deux points distincts A et B de $\mathscr{E}_n$ étant fixés, on considère l'ensemble $\mathscr{H}$ des points M équidistants de A et de B $(AM = AB)$. Soit I le milieu du segment $[AB]$.

1. Montrer que $M \in \mathscr{H} \iff \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$. En déduire que $\mathscr{H}$ est un hyperplan affine. $\mathscr{H}$ est appelé hyperplan médiateur (resp médiatrice) du segment $[AB]$ (resp lorsque $n = 2$).
2. Soit $\sigma_{\mathscr{H}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{H}$. Vérifier que $\sigma_{\mathscr{H}}(A) = B$.

II- Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles de $\mathscr{E}_2$ tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$.

1. On suppose que $A \neq A'$ et on note σ_1 la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de $[AA']$. Montrer que $\sigma_1(A'B'C') = AB_1C_1$ avec $AB_1 = AB$, $AC_1 = AC$ et $B_1C_1 = BC$.
2. On suppose que $B_1 \neq B$ et on note σ_2 la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de $[BB_1]$. Montrer que $\sigma_2(ABC_1) = ABC_2$ avec $AC_2 = AC$ et $BC_2 = BC$.
3. On suppose que $C_2 \neq C$ et on note σ_3 la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de $[CC_2]$. Montrer que $\sigma_3(ABC_2) = ABC$.
4. En déduire l'existence d'un produit d'au plus trois symétries orthogonales transformant ABC en $A'B'C'$.

III- On désigne par $\mathscr{R} = (A_0; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, $\mathscr{R}' = (A'_0, \vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n)$ deux repères orthonormaux de $\mathscr{E}_n$ et on pose : $\overrightarrow{A_0A_i} = \vec{e}_i$, $\overrightarrow{A'_0A'_i} = \vec{e}\,'_i$ pour $i = 0, 1, \ldots n$. Soit g l'application affine de $\mathscr{E}_n$ dans lui-même qui transforme $\mathscr{R}$ en $\mathscr{R}'$.

1. Montrer que g est une isométrie telle que $g(A_i) = A'_i$; $i = 0, 1, \ldots n$.
2. Démontrer l'existence d'un produit d'au plus $n+1$ symétries qui amène A'_i sur A_i pour $i = 0, 1, \ldots n$.
3. En déduire que g se décompose en un produit de $n+1$ symétries au plus.