UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE SUPERIEURE DE YAOUNDE
Concours d'entrée en première année du second cycle : Session de 2009
Filière : Mathématiques
Epreuves d'Algèbre et Analyse Durée : 3heures.

PARTIE 1 : ANALYSE

EXERCICE 1 :

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Montrer que $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est continue. En déduire que pour tout $r > 0$ et tout $a \in E$, la sphère de centre a et de rayon r notée $S(a, r) = \{x \in E / d(a, x) = r\}$ est une partie fermée de E.
2. On suppose E fini. Montrer que pour tout $a \in E$, il existe $r > 0$ telle que $S(a, r) = \emptyset$.
3. On suppose que d est non bornée :
   (a) Montrez que E n'est pas fini.
   (b) Construisez un exemple d'espace, a et r tels que $S(a, r) = \emptyset$.
   (c) On suppose qu'en plus, E est connexe. Montrez qu'aucune sphère n'est vide.

EXERCICE 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

1. Si E est un espace topologique quelconque, montrer que $\Delta = \{(x, x),\ x \in E\}$ est une partie fermée de $E \times E$.
2. On prend f tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^5$.
   (a) Exprimez le plus simplement possible $g(x, y)$ en fonction de x et de y.
   (b) Montrez que pour tout $a \in \mathbb{R}$, g est différentiable en (a, a).
   (c) Pour $(a, h, k) \in \mathbb{R}^3$, exprimez $g(a, a).(h, k)$ en fonction de a, de h et de k.
3. Désormais, on reprend le cas général. Montrez que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2 - \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\}$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que g est continue en (a, a).
5. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f''(a)$ existe. On veut montrer que g est différentiable en (a, a). On pose

$$h(x) = f(x) - f(a) - (x - a)f'(a) - \frac{(x - a)^2}{2} f''(x).$$

   (a) Calculez $h'(x)$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f''(a)$ existe, montrez qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \alpha; a + \alpha[,\ \ h'(x) \leq |x - a|\varepsilon.$$

      i. Soit $D(x, y) = max\{|x - a|, |y - a|\}$. Montrez que $\lim_{(x,y)\to(a,a)} D(x, y) = 0$.
      ii. Soient $(x, y) \in]a-\alpha, a+\alpha[^2$ tels que $x < y$. Pour tout $t \in [x, y]$, montrez que $|h'(t)| \leq \varepsilon D(x, y)$.

iii. En déduire que $|h(x) - h(y)| \leq \varepsilon D(x,y)|x-y|$. (Maj).

6. Si $f''(a)$ existe, montrez que $-\dfrac{1}{D(x,y)}\left[\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(a) - \dfrac{1}{2}[x+y-2a]f''(a)\right]$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers (a,a) à l'aide de (Maj).
7. En déduire que si $f''(a)$ existe, g est différentiable en (a,a) et exprimer $g'(a,a)$.

PARTIE 2 : ALGEBRE

1. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in M_n(K)$ inversible. Déterminer $P \in K[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$. K désigne un corp commutatif.
2. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.
   (a) Montrer que si un élément $a \in H$ possède exactement deux conjugués, alors G admet un sous-groupe distingué propre.
   (b) On suppose que H est invariant dans G et que l'ordre m de H est premier avec l'index t de H dans G.
   Montrer que H est le seul sous-groupe d'ordre m.
3. Soit $(A,+,\bullet)$ un anneau non nul. On suppose que : pour tout $a \in A$, $a \neq 0$, il existe un unique $b \in A$ tel que $aba = a$. Montrer que :
   (a) $aba = a \implies bab = b$.
   (b) A ne contient pas de diviseurs de zéro.
   (c) A est un corps.