UNIVERSITE DE YAOUNDE I

ECOLE NORMALE SUPERIEURE SUPERIEURE DE YAOUNDE

Concours d'entrée en première année du second cycle : Session d'Août 2010

Filière : Mathématiques

Epreuves de Géométrie (majeure) Durée : 3heures.

Dans toute l'épreuve, E_n est un espace affine euclidien de dimension n et de direction E_n.

EXERCICE 1 : **5 points**

1. On appelle similitude (linéaire) de E_n de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$, tout endomorphisme u de E_n tel que $\|u(x)\| = k\|x\|$ pour tout $x \in E_n$. Leur ensemble est noté $\mathcal{GO}(E_n)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{GO}(E_n)$ est un sous-groupe de $(GL(E_n), \circ)$.
   (b) Soit $u \in \mathcal{L}(E_n)$ un endomorphisme non nul avec $n \geq 2$. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
      i. $u \in \mathcal{GO}(E_n)$
      ii. $\forall (x, y) \in E_n \times E_n$, $(x.y = 0 \Rightarrow u(x).u(y) = 0)$.
2. On appelle *similitude affine de* $\mathcal{E}_n$ toute application affine de $\mathcal{E}_n$ dans lui-même d'endomorphisme associé une similitude linéaire.
   (a) Soit $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ une application. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes :
      i. f est une similitude affine de $\mathcal{E}_n$
      ii. f est bijective et pour tous $A, B, C \in \mathcal{E}_n$, avec $B \neq A$ et $C \neq A$, on a $\widehat{BAC} = \widehat{f(B)f(A)f(C)}$.
      iii. Il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$, $f(M)f(N) = kMN$ pour tous $M, N \in \mathcal{E}_n$.
   (b) Soit $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ une similitude de rapport $k \neq 1$. Démontrer que :
      i. f admet un unique point fixe Ω,
      ii. $f = h(\Omega, k) \circ g = g \circ h(\Omega, k)$, $h(\Omega, k)$ est une homothétie et g une isométrie de $\mathcal{E}_n$ telle que $g(\Omega) = \Omega$.
3. On suppose $\mathcal{E}_3$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
   (a) Démontrer que l'application affine

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_3 & \to & \mathcal{E}_3 \\ M(x,y,z) & \mapsto & M'(x',y',z') \end{array} \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} x' = 8x + y - 4z - 1 \\ y' = -4x + 4y - 7z + 1 \\ z' = x + 8y + 4z + 2 \end{cases}$$

   est une similitude directe.
   (b) Déterminer ses éléments carectéristiques.

EXERCICE 2 : **5 points**

Soit X et Y deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}_n$. On note MN la distance euclidienne de deux points M, N de $\mathcal{E}_n$. On se propose de déterminer la distance

$$dist(X, Y) = \inf\{MN,\ M \in X \quad \text{et} \quad N \in Y\}$$

des deux sous-espaces affines X et Y.

1. Justifier que $dist(X,Y)$ existe.
2. Montrer que $(\overrightarrow{X}+\overrightarrow{Y})^{\perp}=\overrightarrow{X}^{\perp}\cap\overrightarrow{Y}^{\perp}$.
3. Soient $A\in X$ et $B\in Y$. En décomposant $\overrightarrow{AB}$ dans $E_n=(\overrightarrow{X}+\overrightarrow{Y})\oplus(\overrightarrow{X}+\overrightarrow{Y})^{\perp}$, montrer qu'il existe $A_1\in X$ et $B_1\in Y$ tels que $\overrightarrow{A_1B_1}\in\overrightarrow{X}^{\perp}\cap\overrightarrow{Y}^{\perp}$.
4. Soient $M\in X$ et $N\in Y$.
   (a) Montrer que $MN\geq A_1B_1$ et que l'on a l'égalité si et seulement si $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{A_1B_1}$.
   (b) Que peut-on en déduire ?
5. Montrer que le couple $(A_1,B_1)\in X\times Y$ tel que $dist(X,Y)=A_1B_1$ est un unique si et seulement si $\overrightarrow{X}\cap\overrightarrow{Y}=\{\vec{0}\}$.
6. Que peut-on en déduire lorsque $n=3$ et que X et Y sont deux droites non parallèles.
7. Soit $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_r)$ une base de $\overrightarrow{X}+\overrightarrow{Y}$. Montrer que l'on a :

$$dist(X,Y)=\frac{gram(\overrightarrow{MN},\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_r)}{gram(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_r)},$$

   où $M\in X$, $N\in Y$ et $gram(\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_m)=det\left[(\vec{t}_i.\vec{t}_j)_{i,j}\right]$.