positioning
/home/loumbert/Documents/Mesfigures//home/loumbert/Documents/Manuel/Transformations/
vmargin=2cm,hmargin=1.5cm

fili Espaces vectoriels et applications linéaires

En première approximation, un espace vectoriel est un ensemble où on sait additionner les éléments, et multiplier les éléments par un nombre. Il y a beaucoup à dire pour préciser cette notion. La structure d'espace vectoriel sert à filtrer les applications linéaires. En effet ces dernières sont les applications qui "respectent" précisément cette structure-là. Parmi les principaux exemples d'espace vectoriel, figurent beaucoup de sous-espaces vectoriels : un sous-espace vectoriel est une partie d'un espace vectoriel qui "hérite" de la structure.

Table des matières

[every node/.style=minimum size=1cm,on grid] [every node/.append style=yslant=-0.5,yslant=-0.5] [right color=gray !10, left color=black !50] (0,0) rectangle +(3,3) ; at (0.5,2.5) 9 ; at (1.5,2.5) 7 ; at (2.5,2.5) 1 ; at (0.5,1.5) 2 ; at (1.5,1.5) 4 ; at (2.5,1.5) 8 ; at (0.5,0.5) 5 ; at (1.5,0.5) 3 ; at (2.5,0.5) 6 ; (0,0) grid (3,3) ; [every node/.append style=yslant=0.5,yslant=0.5] [right color=gray !70,left color=gray !10] (3,-3) rectangle +(3,3) ; at (3.5,-0.5) 3 ; at (4.5,-0.5) 9 ; at (5.5,-0.5) 7 ; at (3.5,-1.5) 6 ; at (4.5,-1.5) 1 ; at (5.5,-1.5) 5 ; at (3.5,-2.5) 8 ; at (4.5,-2.5) 2 ; at (5.5,-2.5) 4 ; (3,-3) grid (6,0) ; [every node/.append style= yslant=0.5,xslant=-1,yslant=0.5,xslant=-1] [bottom color=gray !10, top color=black !80] (6,3) rectangle +(-3,-3) ; at (3.5,2.5) 1 ; at (3.5,1.5) 4 ; at (3.5,0.5) 7 ; at (4.5,2.5) 5 ; at (4.5,1.5) 6 ; at (4.5,0.5) 8 ; at (5.5,2.5) 2 ; at (5.5,1.5) 3 ; at (5.5,0.5) 9 ; (3,0) grid (6,3) ;

« *Un espace, c'est plus qu'un cube* »

1 Espace vectoriel de dimension finie

Commencer par une activité qui permet de définir la notion de groupe commutatif.

1.1 Définition et exemple

Soit E un ensemble non vide. On définit les applications suivantes :

Loi de composition interne

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

Loi de composition externe

$$\times : \begin{array}{ccc} \times E & \longrightarrow & E \\ (, x) & \longmapsto & \times x \end{array}$$

E muni de ces deux opérations a une structure d'espace vectoriel les propriétés suivantes sont vérifiées.

P_1- $(E, +)$ est un groupe commutatif i.e

i. l'opération $+$ est associative i.e $\forall x, y, z \in E$, $x + (y + z) = (x + y) + z$

ii. l'opération $+$ admet un élément neutre i.e $\exists e \in E$, tel que $e + x = x + e = x$

iii. tout élément de E est symétrisable i.e $\forall x \in E$, $\exists x' \in E$ tel que $x + x' = x' + x = e$.

iv. l'opération $+$ est commutative i.e $\forall x, y \in E$, $x + y = y + x$

P_2- $\forall, \in$, $\forall x \in E$,

i. $(\times) \times x = \times(\times x)$

ii. $(+) \times x = \times x + \times x)$

P_3- $\forall x, y \in E$, $\forall \in$, $\times(x + y) = \times x + \times y$

P_4- $\forall x \in E$, $1 \times x = x$

Un ensemble E muni des opérations $+$ et $\times$ et vérifiant les propriétés ci-dessus est une espace vectoriel réel ou -espace vectoriel. Ses éléments sont appelés des vecteurs.

$(^2, +, \times)$; $(^n, +, \times)$; l'ensembles des couples d'éléments de ; l'ensembles des vecteurs du plan ou de l'espaces ; l'ensembles des fonctions dérivables sur sont des espaces vectoriel sur .

2 Sous espace vectoriel

2.1 Définition et propriétés

Soit $(E, +, \times)$ un espace vectoriel réel et F une partie de E. F est un sous espace de E si F muni des lois induites est un espace vectoriel. Soit

$(E,+,\times)$ un espace vectoriel réel et F une partie de E. F est un sous-espace vectoriel de E les propriétés suivantes sont vérifiées :

i. $F \neq \emptyset$

ii. $\forall u, v \in F,\ u+v \in F.$

iii. $\forall u \in F,\ \forall \in,\ .u \in F$

Un sous espace vectoriel est un espace vectoriel. Pour éviter la définition kilométrique de l'espace vectoriel, montrer que la donnée d'un triplet $(E,+,\times)$ est un espace vectoriel, revient à montre tout simplement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.

[sous-espace vectoriel] F est un sous-espace vectoriel de E $F \neq \emptyset$ et $\forall u, v \in F,\ \forall, \in,\ .u + .v \in F$

On pos $E =^2$ et F la droite d'équation $2x+3y=0$.

1- Montrer que F est un sous espace vectoriel de $(E, +\times)$

2- Si on pose $E =$ et $F =$, peut-on dire que F est un sous-espace de $(E, +\times)$? Justifier la réponse.

(intersection des 2 s-e-v d'un même -e-v.) Soit $(E,+,\times)$ un -e-v, E' et E'' deux s-e-v de E. l'intersection $E' \cap E''$ est un s-e-v de E **NB** : La réunion de deux sous espaces vectoriel n'est pas toujours un sous espace vectoriel.

2.2 Système linéairement dépendant- linéairement indépendant

Soit E un espace vectoriel réel sur . $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n)$ une famille de n vecteurs de E.

i. On dit que $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n)$ est un système linéairement dépendant ou système lié lorsqu'il existe n nombres réels $_{1,2}, \cdots, _n$ non tous nuls tels que $_1.\overrightarrow{e}_1 +_2 .\overrightarrow{e}_2 + \cdots +_n .\overrightarrow{e}_n = 0$

ii. On dit que $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n$ est un système linéairement indépendant ou système libre lorsque pour tout p-uplet de nombres réels $(_{1,2}, \cdots, _p)$,

$$(_1.\overrightarrow{e}_1 +_2 .\overrightarrow{e}_2 + \cdots +_n .\overrightarrow{e}_n) = 0_1 =_2 = \cdots =_p = 0$$

On pose $E =^2$, $e_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j$; $e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j$; $e_3 = i + j$

$(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ est un système linéairement dépendant et que (e_1, e_2) est un système indépendant.

2.3 Système générateur d'un espace vectoriel

Soient E un espace vectoriel et $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n$ n vecteurs de E.

$(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n)$ est un système générateur de E si tout élément de E s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n$, c'est-à-dire $\forall x \in E, \exists_{1,2} \cdots, _n\, telsquex =_1 .\overrightarrow{e}_1 +_2 .\overrightarrow{e}_2 + \cdots +_n .\overrightarrow{e}_n$

On note $E =^2$, $e_1 = (1,2)$, $e_2 = (2,2)$

$(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est un système générateur.

Même question pour $E =^3$, $e_1 = (2,1,0)$, $e_2 = (1,1,-1)$, $e_3 = (-1,1,-1)$
Soit E un -e-v, et $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n)$ une famille de n vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n)$ est un s-e-v de E. C'est le s-e-v engendré par $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n)$.

2.4 Base et dimension d'un espace vectoriel

$E =^2$, $e_1 = \frac{1}{2}.i + \frac{\sqrt{3}}{2}.j$, $e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.i + \frac{1}{2}.j$
(e_1, e_2) est un système générateur et libre.
180L'objet est de définir la base d'un e-v
Soit $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E.

$(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n)$ forme une base de E si :

- ▷ $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n)$ forme un système générateur de E
- ▷ $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_n)$forme un système libre de E

La dimension d'un espace vectoriel E est le nombre de vecteurs qui constitue une base de E.

2.5 Sous espaces vectoriels supplémentaires

$E = E_1 \oplus E_2 [E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et $E = E_1 \cup E_2]$
Conséquence : $E = E_1 \oplus E_2 \dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$

3 Applications linéaires

3.1 Définitions et exemples

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions finies. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\forall u, \, v \in E, \; f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall u \in E, \, \forall \in, \; f(.u) = .f(u)$

1. Les propriétés 1. et 2. ci-dessus peuvent être résumées comme suit :
$$\forall u, v \in E, \forall, \in, f(.u) + .v = .f(u) + .f(v)$$
2. Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire, alors f est appelée endomorphisme de E

1. $f :\to^2$ tel que $f(x) = (x, 2x)$ est une application linéaire.
2. $h :\to$ tel que $h(x) = ax$ avec $a \in$ est une application linéaire.
3. $E =^2$, (i,j) une base de E. $u = xi + yj$, $f(u) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) i + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right) j$ est une application linéaire.

1. Une application linéaire de $f : E \to F$ est encore appelée morphisme ou homomorphisme.

2. Lorsque f est définie de E vers E, on parle d'endomorphisme.
3. Tout morphisme bijectif est appelé isomorphisme.
4. Tout endomorphisme bijectif est appelé automorphisme.
5. L'ensemble des endomorphisme de E est noté (E).

3.2 Noyau d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, on appelle ***Noyau*** de f et on note f l'ensemble des vecteurs de E d'image nulle par f. i.e $f = \{u \in Etelquef(u) = 0_E\}$

1. f est un sous-espace de E.(à prouver)
2. $dimf \leq dimE$

(Application linéaire injective)
Une application linéaire $f : E \to F$ est injective $f = \{0_E\}$
$E =^3$, $F =^2$. $u = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. $f : E \to F$ telle que $f(u) = (x+2y-z)e_1 + (x+z)e_2$.
Déterminer f et en préciser une base.

3.3 Image d'une application linéaire

$f : E \to F$une application linéaire. On appelle image de f et on note f, l'ensemble des vecteurs de F qui ont un antécédent dans E par f.
i.e $f = \{v \in F\exists u \in Etelquef(u) = v\}$

1. f est un sous-espace de F. (à prouver)
2. si f est un endomorphisme de E, alors $\dim f + \dim f = \dim E$.

[Application linéaire surjective] $f : E \to F$une application linéaire. f est surjective $f = F$.

3.4 Application linéaire bijective

Une application linéaire bijective est une application surjective et injective. Elle est encore appelée isomorphisme.

On note E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E,

1. f injective f surjective f bijective.
2. Un endomorphisme de E est entièrement déterminé par la donnée de images des vecteurs de la base de E.

On donne $f(i) = i + j$ et $f(j) = -j$. Déterminer analytiquement f. 180**Réponse** : $f(x, y) = (x, x - y)$

4 Matrice d'une application linéaire

Soit E_n un espace vectoriel de dimension 2, $= (i_1, i_2, \cdots, i_n)$ une base de E_n. On note f l'endomorphisme de E_n défini par : $f(i_1) = a_1\overrightarrow{i_1} + a_2\overrightarrow{i_2} + \cdots + a_n i_n$, $f(i_2) = b_1\overrightarrow{i_1} + b_2\overrightarrow{i_2} + \cdots + b_n i_n$, $\cdots$, $f(i_n) = m_1\overrightarrow{i_1} + m_2\overrightarrow{i_2} + \cdots + m_n i_n$,

la matrice de f dans la base est le tableau défini par

$$M_f = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & m_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & m_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & m_n \end{pmatrix}$$

Lorsqu'une matrice est constitué de n lignes et n colonnes, on parle de matrice carrée d'ordre n. (*Dans le cadre de notre leçon, nous n'irons pas au delà des matrices carrées d'ordre 3*)

4.1 Inversibilité d'une matrice

(Cas d'une matrice carrée d'ordre 2)

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2, on appelle déterminant de M le réel $\det M = ad - bc$. Lorsque $\det M \neq 0$, on dit que M st inversible.

Soit f un endomorphisme et $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de f.

1. Si M est inversible, alors f est un automorphisme
2. Si M est inversible, alors la matrice inverse de M est

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

M^{-1} est la matrice de l'automorphisme réciproque de f.

4.2 Opérations sur les matrices

Ici nous nous intéresserons aux opérations telles que la somme de 2 matrices, le produit d'une matrice par un réel et le produit de 2 matrices.

Soient f et g deux endomorphismes de E_2 dont les matrices dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont :

$$M_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} et M_g = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}.$$

4.2.1 Somme de deux matrices

$f+g$ est un endomorphisme et la matrice de $f+g$ dans la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ est :

$M_f + M_g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$

4.2.2 Produit par un réel

Soit un nombre réel, $.f$ est un endomorphisme de E_2 et sa matrice est :

$M_{.f} = \begin{pmatrix} .a & .c \\ .b & .d \end{pmatrix}$.

4.2.3 Produit de deux matrices

$f \circ g$ est un endomorphisme et sa matrice est donné comme suit :

$$M_{f\circ g} = M_f \times M_g = \left(\begin{array}{cc} a & c \\ \hline b & d \end{array} \right) \left(\begin{array}{|cc} a' & c' \\ b' & d' \end{array} \right) = \begin{pmatrix} aa'+cb' & a'c+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix}$$

4.2.4 Détermination d'un morphisme par la donnée de sa matrice

Un endomorphisme de E_n est entièrement déterminé par la donnée de sa matrice relativement à une base de E_n.

Image d'un vecteur

Soit $u = xe_1 + ye_2$ un vecteur de E_2. Déterminons l'image de u par l'endomorphisme f de matrice

$M_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2).

On sait que $f(\overrightarrow{i}) = ae_1 + be_2$ et $f(j) = ce_1 + de_2$

On aura

$$\begin{aligned} f(u) &= f(xe_1 + ye_2) \\ &= x(ae_1) + be_2) + y(ce_1 + de_2) \\ &= (ax+cy)e_1 + (bx+dy)e_2 \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclure.

5 Exercices et problèmes

1. Montrer que dans l'espace vectoriel R^2, la famille $(1,2);(-3,1)$ forme une base.
   Écrire le vecteur $(5,1)$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base.

1. Écrire le vecteur $h : x \longmapsto 12x + 3$ comme combinaison linéaire des vecteurs $g : x \longmapsto x - 1$ et $f : x \longmapsto 3x + 2$.
   (a) De quel espace vectoriel est-il ici question ?
   (b) Vérifier que le système g, f forme une base.

1. Dans l'ensemble V_2 des vecteurs du plan rapporté à une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, On considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{e_3} = 4\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$.
   (a) Le système $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ peut-il être une base de V_2? justifier votre réponse.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ forment une base de V_2.
   (c) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{e_3}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

1. Dans l'espace R^3, le système formé par les vecteurs $(1, 2, -1)$; $(3, 0, -5)$ et $(0, 1, 12)$ est-il une base ?
2. Dans l'ensemble des vecteurs V_3 de l'espace rapporté à une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ on considère l'ensemble F des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et $2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$. Soit $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ un vecteur de F.
   (a) Trouver une relation entre x, y, et z.
   (b) Montrer que F est un sous espace vectoriel de V_3
   (c) En déterminer une base, puis préciser la dimension de F.

1. Soit A la partie de R^3 formée des triplets (x, y, z) tels que $2x-y+z = 0$. Montrer que A est un sous espace vectoriel de R^3, Construire une base de A ; déterminer alors une dimension de A.
2. Soit B la partie de R^3 engendrée par les triplets $(2, 1, -1)$ et $(1, 3, -3)$. Écrire une équation cartésienne de B.
3. Déterminer trois vecteurs de $A \cap B$, caractériser les vecteurs de $A \cap B$ puis déterminer la dimension de $A \cap B$.

1. l'ensemble H des triplets (x, y, z) tels que $x - 2y + 4z + \alpha = 0$ est-il toujours un sous-espace vectoriel de R^3 ? Justifiez-vous.

On donne $f : E_3 \to E_3$ définie par $\begin{cases} f(i) = i + 3j + k \\ f(j) = 4i - j + 12k \\ f(k) = i + 5j - 5k \end{cases}$

1. Écrire la matrice de f dans la base (i, j, k)
2. On donne $\begin{array}{lll} f : E_2 & \to & E_2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + 3y, 4x + y) \end{array}$

   Écrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

On considère la matrice suivante relative à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$

M est-elle inversible ? Si oui déterminer son inverse.

On pose

1. $E =^3$, $F =^2$. $f : E \to F$,
   $u = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. $u' = x'\overrightarrow{e}_1 + y'\overrightarrow{e}_2$ $f(u) = u'$ et on a :
   $\begin{cases} x' = 2x + y - 2z \\ y' = -x - \frac{1}{2}y + z \end{cases}$
   Déterminer f et en préciser une base.
2. Soit $\begin{array}{ccc} f : & ^2 & \longrightarrow \\ & (x,y) & \to & (-x+2y, 2x-4y) \end{array}$
   (a) Vérifier que f est un morphisme
   (b) Déterminer f et f. On donnera une base de chacun.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A + B$, $B + A$, $3A$, $A \times B$ et $B \times A$.
2. Peut-on affirmer que la multiplication des matrices est commutative ? Qu'en est-il de l'addition des matrice ?

Soit Id_{E_2} l'application identique de E_2(*définie comme plus haut*).

1. Déterminer la matrice de Id_{E_2} relativement à la base (i, j).
2. Montrer que cette matrice notée I est l'élément neutre pour la multiplication des matrices carrées d'ordre 2.

Soient f un endomorphisme de E_2 dont la matrice dans la base (i, j) est :
$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ et
$u = 2i + 3j$ un vecteur de E_2.

1. Déterminer l'image de u par g.
2. Déterminer l'expression analytique de f.

E désigne un espace vectoriel de dimension 3 muni de la base (i, j, k) et f l'endomorphisme de E défini par $f(i) = i$, $f(j) = f(k) = \frac{1}{2}(j + k)$ On note f le noyau de f et f l'image de E par f.

1. une base de f.
2. une base de f.
3. tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de f et d'un vecteur de f
4. (a) Vérifier que $f \circ f = f$
   (b) $u \in f \Rightarrow f(u) = u$,