# Chapitre: Isométries et Homothéties dans le plan

**Préambule**

Une isométrie est une application du plan qui conserve les distances. Une homothéties est une application du plan qui réduit ou multiplie les distances. En classe de 2nde C, ont été étudiées séparément certaines isométries (translations, symétries, et rotations) et homothéties. Dans ce chapitre, il est question de répertorier, composer et utiliser (lieux géométriques, problèmes de construction, de démonstration) ces transformations du plan.Voici de façon presque détaillée le plan du chapitre :

## Table des matières



« Conservation ou agrandissement ! »

# 1 Isométries du plan

## 1.1 Translations et symétries orthogonales

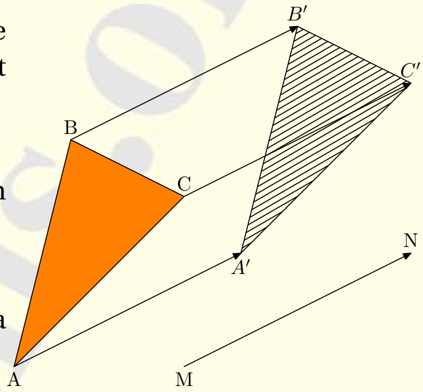
### 1.1.1 Translations

**Définition**

Toute translation est définie par un vecteur. La translation de vecteur $\vec{u}$ notée $t_{\vec{u}}$, est l'application du plan dans lui-même qui à tout point $A$ associe le point $A'$ tel que : $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.

Il en ressort les propriétés suivantes :

- si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $t_{\vec{u}}$ est l'application identique. Tous les points du plan son invariants ;
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors aucun point n'est invariant ;
- Si $A'$ et $B'$ désignent respectivement les images des points $A$ et $B$ par la translation $t_{\vec{u}}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.




**Propriétés**

**Propriété** — *Propriété caractéristique*

Soit $f$ une application du plan dans lui-même . $f$ est une translation si et seulement si , pour tous points $A$ et $B$ d'images respectives $A'$ et $B'$, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Preuve : Évident

**Propriété** — *Composée de deux translations*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

**Remarque**

- Puisque $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, alors $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ ;
- Si $\vec{v} = -\vec{u}$ alors $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = Id$. Cette relation caractérise la bijection réciproque.
- Toute translation est une transformation du plan ; la transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$.

**Exemple**

Soit ABCD un parallélogramme. On a : $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{AC}}$ ; $t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{DC}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$ ; $(t_{\overrightarrow{AD}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{CB}}$

**Expression analytique d'une translation**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $t$ la translation de vecteur $\vec{u}(a,b)$, $M(x,y)$ un point du plan et $M'(x',y')$ son image par $t$. On se propose de déterminer l'expression analytique de $t$, c'est-à-dire d'exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.

On a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$ .

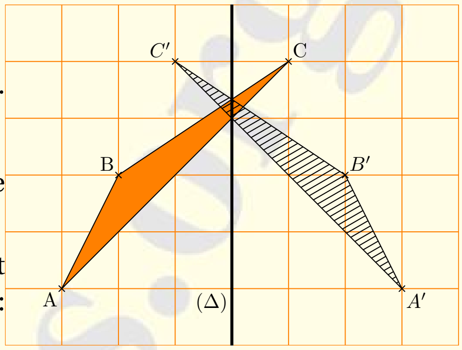
Donc l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}(a,b)$ est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

**Exercice 1.e Page 65**

### 1.1.2 Symétries orthogonales

**Définition**
La symétrie orthogonale d'axe $(\Delta)$, notée $s_\Delta$, est l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M$ associe le point $M'$ tel que :

- si $M \in (\Delta)$, alors $M' = M$ ;
- si $M \notin (\Delta)$, alors $M'$ est le point tel que $(\Delta)$ est la médiatrice de $[MM']$.



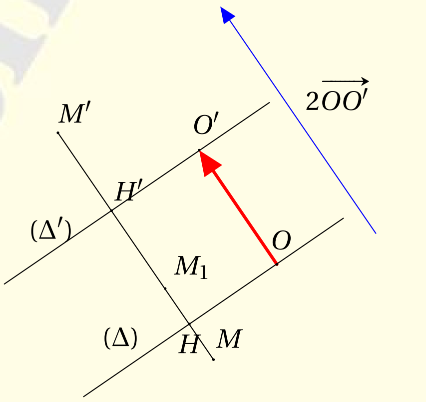

On admet les propriétés suivantes :

- l'ensemble des points invariants par une symétrie orthogonale d'axe $(\Delta)$ est la droite $(\Delta)$ ;
- soit $O$ un point $\vec{u}$ un vecteur non nul, $(\Delta)$ la droite passant par $O$ et de vecteur directeur $\vec{u}$, pour tous points $M$ et $M'$, distinct de $O$, on a :
$$s_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \end{cases}.$$

**Propriétés**

**Propriété** — *Composée(axes parallèles)*

Soit $(\Delta)$ et $(\Delta')$ deux droites parallèles, $O$ un point de $(\Delta)$, $O'$ son projeté orthogonale sur $(\Delta')$. La composée $s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ des symétries orthogonales d'axes respectives $(\Delta)$ et $(\Delta')$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$




*Faire la preuve ou commencer par une activité qui est en fait la preuve de cette propriété.*

**Remarque**

- Lorsque les droites $(\Delta)$ et $(\Delta')$ sont confondues, on obtient $s_\Delta \circ s_\Delta = Id$.
- Toute symétrie orthogonale est sa propre réciproque.
- Si $(\Delta) \mathbin{/\!/} (\Delta')$, alors les transformations $s_\Delta \circ s'_\Delta$ et $s'_\Delta \circ s_\Delta$ sont réciproques l'une de l'autre.

**Propriété** — *Décomposition d'une translation*

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$. Pour toute droite $(\Delta)$ de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une droite $(\Delta')$ et une seule telle que : $s_{\Delta'} \circ s_\Delta = t_{\vec{u}}$.

**Démonstration**
Existence
Soit $(\Delta')$ l'image de $(\Delta)$ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$. D'après l'étude précédente, la droite $(\Delta')$ vérifie : $s_{\Delta'} \circ s_\Delta = t_{\vec{u}}$.
Unicité
Soit $(\Delta")$ une droite telle que $s_{\Delta"} \circ s_\Delta = t_{\vec{u}}$. Démontrons que les droites $(\Delta')$ et $(\Delta")$ sont confondues.

$$\begin{aligned} s_{\Delta'} \circ s_\Delta = s_{\Delta"} \circ s_\Delta \quad &\Rightarrow \quad (s_{\Delta'} \circ s_\Delta) \circ s_\Delta = (s_{\Delta"} \circ s_\Delta) \circ s_\Delta \\ &\Rightarrow \quad s_{\Delta'} \circ (s_\Delta \circ s_\Delta) = s_{\Delta"} \circ (s_\Delta \circ s_\Delta) \\ &\Rightarrow \quad s_{\Delta'} = s_{\Delta"} \end{aligned}$$

**Exercice d'application**

Soit ABCD un losange de centre O et I, J, K, L les milieux respectifs de [AB], [AD], [CD], [CB]. Exprimer les translations suivantes comme composée de deux symétries orthogonales : $t_{\overrightarrow{AO}}$, $t_{\overrightarrow{OC}}$, $t_{\overrightarrow{AC}}$

**Expression analytique**

**Activité**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soit $s_\Delta$ une symétrie orthogonale d'axe $(\Delta)$. Déterminer l'expression analytique de $s_\Delta$ dans chacun des cas suivants :

1. $(\Delta) : y = b\,;\, b \in R$
2. $(\Delta) : x = a\,;\, a \in \mathbb{R}$
3. $(\Delta) : y = x\,;$

Faire les exercices de la page 65 1èreSM

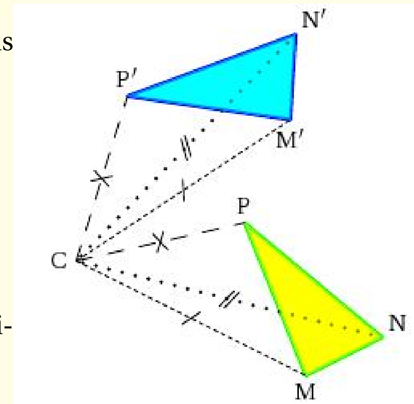
## 1.2 Rotations

### 1.2.1 Composée de symétries orthogonales d'axes sécants

**Rappels**

La rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha$ notée $r_{(O,\alpha)}$ est l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M$ associe le point $M'$ tel que :

- Si $M = O$ alors $M' = O$. (le centre est l'unique point invariant)
- si $M \neq O$, alors $OM = OM'$ et mes$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = \alpha$.
- Si $\alpha = 0$ alors $r$ est l'application identique.
- si $\alpha = \pi$, alors $r$ est la symétrie de centre $O$.
- Toute rotation est une transformation du plan ; la transformation réciproque de $r_{(O,\alpha)}$ est la rotation $r_{(O,-\alpha)}$




**Propriété**

Soit $(\Delta)$ et $(\Delta')$ deux droites sécantes en un point $O$, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. La composée $s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ des symétries d'axes respectives $(\Delta)$ et $(\Delta')$ est la rotation de centre $O$ et d'angle $2(\vec{u}, \vec{u}')$.

***Preuve*** *: Prendre les points $M$, $M_1$ et $M'$ tels que $M_1 = s_\Delta(M)$ et $M' = s_\Delta(M_1)$ plus une construction adéquate.*

**Remarque**

- $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ est une rotation de centre $O$ et d'angle $2(\vec{u}', \vec{u})$. Les transformations $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ et $s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ sont réciproque l'une de l'autre.
- Si $(\Delta)$ et et $(\Delta')$ sont perpendiculaires, alors $2(\vec{u}', \vec{u}) = \pi$ et $s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ est une symétrie de centre $O$.

*On peut dire que toute rotation d'angle non nul peut s'écrire d'une infinité de façons comme composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants.*

**Propriété**

Soit $r_{(O,\alpha)}$ une rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha$. Pour toute droite $(\Delta)$ passant par $O$, il existe une droite $(\Delta')$ et une seule telle que $s_{\Delta'} \circ s_\Delta = r_{(O,\alpha)}$.

**Démonstration**

Existence

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $(\Delta)$ et $\vec{u}'$ un vecteur tel que $mes(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$ a pour mesure $\dfrac{\alpha}{2}$.

D'après l'étude précédente, la droite $(\Delta')$ passant par $O$ et de vecteur directeur $\vec{u}'$ est telle que :

$s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = r_{(O,\alpha)}$.

Unicité

Soit $(\Delta")$ une droite telle que $s_{\Delta"} \circ s_{\Delta} = r_{(O,\alpha)}$.

Démontrons que les droites $(\Delta")$ et $(\Delta')$ sont confondues.

$$\begin{aligned}
\text{On a : } s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta"} \circ s_{\Delta} \quad &\Rightarrow \quad (s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}) \circ s_{\Delta} = (s_{\Delta"} \circ s_{\Delta}) \circ s_{\Delta} \\
&\Rightarrow \quad s_{\Delta'} \circ (s_{\Delta} \circ s_{\Delta}) = s_{\Delta"} \circ (s_{\Delta} \circ s_{\Delta}) \\
&\Rightarrow \quad s_{\Delta} = s_{\Delta'}
\end{aligned}$$

Les droites $(\Delta')$ et $(\Delta")$ sont confondues.

**Exemple**

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre $O$. Soit $I$, $J$ et $K$ les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Exprimons les rotations suivantes comme composés de deux symétries d'axes sécants :

$r(A, -\frac{2\pi}{3})$, $r(C, \frac{\pi}{3})$, $r(O, \frac{2\pi}{3})$, $r(B, \frac{\pi}{3})$

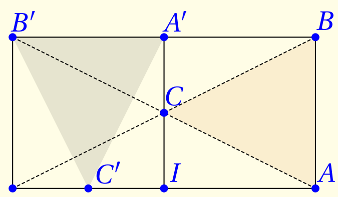
### 1.2.2 Propriété caractéristique

**Propriété**

Soit $f$ une application du plan dans lui-même et $\alpha$ un angle non nul. $f$ est une rotation d'angle $\alpha$ si et seulement si, pour tous points $M$ et $N$ distincts d'images respectives $M'$ et $N'$, on a : $MN = M'N'$ et $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'} = \alpha)$.

**Exemple**

Sur la figure ci-contre, on considère la rotation de centre $I$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.




1. Déterminer les images des points $A$, $B$ et $C$.
2. Que peut-on dire des triangles $ABC$ et $A'B'C'$ ?
3. Donner une mesure de chacun des angles : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C'A'})$.
4. Y a t-il conservation des distances et des angles par une rotation ?

### 1.2.3 Composée de rotations

**Propriété**

1. Soit $r$ et $r'$ deux rotations de centre $O$ et d'angles respectifs $\alpha$ et $\alpha'$. $r \circ r'$ est la rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha + \alpha'$.
2. Soit $r$ et $r'$ deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs $\alpha$ et $\alpha'$.
   - si $\alpha + \alpha' \neq 0$, alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$ ; (*voir P 69 CIAM pour construction*)
   - si $\alpha + \alpha' = 0$, alors $r' \circ r$ est une translation.

**Faire les exercices 2.a et 2.d Page 70 CIAM**

## 1.3 Isométries

### 1.3.1 Définition et propriétés fondamentales

Comme nous l'avons déjà mentionné ci-haut, une isométrie du plan est une application du plan qui conserve les distances. Comme exemple, nous avons les translations, les symétries orthogonales et les translations.
**NB**. Les isométries conservent également le produit scalaire et le barycentre.

### 1.3.2 Isométries et configurations

**Images de figures usuelles**

**Propriété**

Soit $f$ une isométrie, $A$ et $B$ deux points distincts d'images respectives $A'$ et $B'$ par $f$ et $R$ un nombre réel strictement positif.

- L'image par $f$ de la droite $(AB)$ est la droite $(A'B')$ ;
- L'image par $f$ du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ ;
- L'image du cercle de centre $A$ et de rayon $R$ est le cercle de centre $A'$ et de rayon $R$.

**Conservation des configurations**

**Propriété**

Les isométries conservent :

- les mesures des angles ;
- le contact (c'est-à-dire si une droite est tangente à un cercle en un point $A$, alors la droite image est aussi tangente au cercle image au point image de $A$) ;
- les aires

**Exercice d'application**
Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre $O$, $A$ et $B$ deux points de $(\mathscr{C})$, $I$ le milieu de $[AB]$. $M$ étant un point du cercle $(\mathscr{C})$, distinct de $A$ et $B$, on désigne par $N$ le point diamétralement opposé à $M$ sur $(\mathscr{C})$, $H$ l'orthocentre du triangle $MAB$.

1. Quel est la nature du quadrilatère $AHBN$ ?
2. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{MH}$.
3. Quel est le lieu des points $H$ lorsque $M$ décrit $(\mathscr{C})$ privé des points $A$ et $B$ ?
4. Quel est le lieu des points $J$, millier de $[MH]$, lorsque $M$ décrit $(\mathscr{C})$ privé des points $A$ et $B$ ?

## 1.4 Complément sur les isométries

### 1.4.1 Reconnaissance des isométries

**Propriété** *Reconnaissance d'isométrie*

- La composée de deux isométries est une isométrie
- la réciproque d'une isométrie est une isométrie.

**Déplacements et antidéplacements**

- un déplacement est une isométrie qui conserve les distances;
- un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé

**Propriété**

- la composée de deux déplacements est un déplacement;
- la composée de deux antidéplacement est un déplacement;
- la composée d'un antidéplacement et d'un déplacement est un antidéplacement
- la réciproque d'un antidéplacement est antidéplacement;
- la réciproque d'un déplacement est un déplacement.

#### 1.4.2 Triangles isométriques

- on dit que des triangles $ABC$ et $A'B'C'$ sont isométriques, ou superposables, s'il existe une isométrie $f$ telle que les points $A$, $B$ et $C$ ont respectivement pour images $A'$, $B'$ et $C'$.
- Si $f$ est un déplacement, on dit que $ABC$ et $A'B'C'$ sont directement superposables.
- si $f$ est un antidéplacement, on dit que les triangles $ABC$ et $A'B'C'$ sont superposables après retournement.

**Théorème**

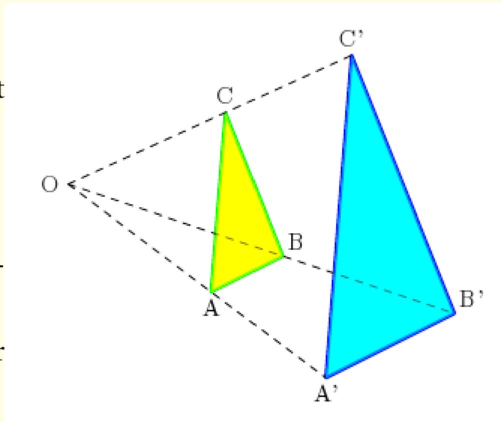
Soit $ABC$ et $A'B'C'$ deux triangles. Si $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$, alors les triangles $ABC$ et $A'B'C'$ sont isométriques.

Exercices à faire : 4.b, 4.d Page 82; 21, 32, 38 Page 84 - 85

# 2 Homothéties

Une homothétie est définie par un point, appelé centre, et un nombre réel non nul, appelé rapport. L'homothétie de centre $O$ et de rapport $k$ notée $h_{O,k}$ ou $h$ est l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M$ associe le point $M'$ tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Nous admettons les propriété suivantes :




- si $k = 1$, alors $h$ est l'application identique et tous les points sont invariants;
- si $k \neq 0$, $O$ est le seul point invariant;
- si $k = -1$ $h$ est la symétrie de centre $O$;
- toute homothétie $h_{(O,k)}$ est une transformation et sa transformation réciproque est $h_{(O,\frac{1}{k})}$;
- si $A'$ et $B'$ désignent les images respectives des points $A$ et $B$ par $h$, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

## 2.1 Les homothéties et leurs utilisations

### 2.1.1 Déterminations et propriétés

**Activité**

1. **Homothétie déterminée par son centre, un point et son image**
   $A$, $B$ et $C$ sont trois points alignés tels que $C$ est entre $A$ et $B$. $M$ et $N$ sont deux points tels que $M \notin (BC)$ et $N \in [BC]$.
   Construire les images des points $M$ et $N$ par l'homothétie de centre $A$, transformant $B$ en $C$.
2. **Homothétie déterminée par deux points et leurs images**
   $ABCD$ est un trapèze tel que $CD = 2AB$. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie $h$ dans chacun des cas suivants :
   a. $A$ et $B$ ont pour images respectives $D$ et $C$ par $h$ ;
   b. $A$ et $B$ ont pour images respectives $C$ et $D$ par $h$.
3. **Homothétie déterminée par son rapport, un point et son image**
   Construire dans chaque cas, le centre de l'homothétie de rapport $k$ qui transforme le point $A$ en point $B$.

   a. $k = -\frac{2}{3}$ b. $k = \frac{2}{3}$


**Propriété**

Soit $f$ une application du plan dans lui-même, $k$ un nombre réel différent de 0 et de 1. $f$ est une homothétie si et seulement si, pour tous points $M$ et $N$ d'images respectives $M'$ et $N'$, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. ♡

**Expression analytique**

**Activité**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $k$ un nombre réel non nul et $\Omega$ le point de coordonnées $(x_0 ; y_0)$. On considère l'homothétie $h$ de centre $\Omega$ et de rapport $k$. Soit $M(x; y)$ un point du plan et $M'(x'; y')$ son image par $h$. Sachant que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. Déterminer une relation liant les coordonnées de $M'$ à celles de $M$.
Conclusion : Cette relation est appelée *Expression analytique* de $h$

**Propriété**

Le plan est muni du repère $Oij$. Soit $k$ un nombre réel non nul et $f$ l'application du plan dans lui-même, qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que $\begin{cases} x' = kx + p \\ y = ky' + q \end{cases}$ où $p$ et $q$ sont des nombres réels.

- si $k = 1$, $f$ est la translation de vecteur $\vec{u}(p; q)$.
- si $k \notin 1$, $f$ est une homothétie de rapport $k$.

Exemple : Exercice 1.e Page 95 CIAM 1$^{\text{ère}}$ SM

### 2.1.2 Homothéties et configurations

### 2.1.3 Utilisations des homothéties

## 2.2 Composition d'homothéties et d'isométries

### 2.2.1 Homothéties et translations

### 2.2.2 Homothéties et isométries